線形代数 (第3回) の解答

問題 3-1 の解答

AB と BA をそれぞれ計算すると,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2x & 2 \\ x & 1 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & 2x+1 \end{bmatrix}.$$

$AB = BA$ より $1+2x = 1$. よって $x = 0$.

問題 3-2 の解答

分配法則より

$$A^3 - ABA = A(A-B)A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

問題 3-3 の解答

等式 (E4) より

$${}^t(ABC) = {}^t((AB)C) = {}^tC\,{}^t(AB) = {}^tC\,{}^tB\,{}^tA.$$

問題 3-4 の解答

まずは, A, B をそれぞれ求める.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}((A+B)+(A-B)) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \\ B &= \frac{1}{2}((A+B)-(A-B)) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$