線形代数 (第5回)

5 行列の簡約化と階数

今回は「行列の簡約化」について説明し, さらに行列で最も重要な不変量である「階数」について定義します. まずは, 必要な用語をいくつか定義していきます.

行列の「行」とは, 横の並びのことでした. 例えば

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ならば, 第1行は $[2\ 1\ 3\ 0\ 1]$, 第2行は $[0\ 1\ 1\ 2\ 0]$, 第3行は $[1\ 0\ 0\ 2\ 1]$ でした.

定義 5.1 (主成分)
行列に対して, 各行の数を左から見ていったときに0でない最初の成分をその行の**主成分**と呼ぶ.

上の行列の場合だと,

$$\begin{aligned} &\text{第 1 行は } [\mathbf{2}\ 1\ 3\ 0\ 1] \text{ なので, 第 1 行の主成分は } \mathbf{2}, \\ &\text{第 2 行は } [0\ \mathbf{1}\ 1\ 2\ 0] \text{ なので, 第 2 行の主成分は } \mathbf{1}, \\ &\text{第 3 行は } [\mathbf{1}\ 0\ 0\ 2\ 1] \text{ なので, 第 3 行の主成分は } \mathbf{1} \end{aligned}$$

となります.

問題 5-1 次の行列の各行の主成分を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

定義 5-2 (階段行列)
各行の主成分が1段ずつの階段になっている行列を**階段行列**と呼ぶ.

例えば,

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

はすべて階段行列です．行列の左上隅から右横に進んで, 主成分に出会うごとに 1 段だけ降りる階段だと思えばよいです．右下まで到達する必要はありません.

問題 5-2 次の行列のうち階段行列を選べ.

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

定義 5-3 (簡約行列)

行列 A が次の 3 条件を満たすとき, **簡約行列**と言う.

(a) A は階段行列である.

(b) 主成分はすべて 1 である.

(c) 主成分を含む列の主成分以外の成分はすべて 0 である.

次の例題を用いて簡約行列の条件 (a), (b), (c) の意味を確認します.

例題 5-1

次の行列のうち簡約行列を選べ.

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

[解答]

(1) 簡約行列である．

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となっており，階段行列なので (a) を満たす．また，主成分 (赤) はどちらも 1 なので (b) も満たす．(c) の主成分を含む列とは，この行列の場合だと第 2 列と第 4 列が該当する．これらの列では，主成分 (赤) 以外の成分はすべて 0 なので (c) も満たす．

(2) 簡約行列ではない．

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{2} & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となっており，階段行列であるので (a) は満たすが，主成分 (赤) の 1 つが 2 であるため (b) は満たしていない．

(3) 簡約行列ではない．

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となっており，階段行列であるので (a) は満たす．また，主成分 (赤) はどちらも 1 より (b) も満たす．しかし，第 4 列は主成分の 1 以外にも 0 でない成分があるので (c) を満たさない．

□

定理 5-1 (行列の簡約化)

(1) 与えられた行列は基本変形を繰り返すことで簡約行列に変形できる．これを**行列の簡約化**と呼ぶ．

(2) 与えられた行列を簡約化する過程はいろいろあるが，最終結果はただ一通りである．

例題で定理 5-1 の内容を確認しておきます.

例題 5-2

次の行列が簡約行列かどうか判定せよ. また, 簡約行列でないものは簡約化せよ.

$$(1)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad (2)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

[解答]

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} \end{bmatrix}$ は (a) を満たさないので簡約行列ではない. 基本変形

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} &\longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} && \text{第 1 行} \leftrightarrow \text{第 2 行} \\ &\longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} && \text{第 1 行} \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

を行うと $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ は (a), (b), (c) を満たすので簡約行列である.

(2) $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ は (a), (b) を満たすが (c) を満たさないので簡約行列ではない. 基本変形

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{第 1 行に第 2 行} \times (-1) \text{ を足した}$$

を行うと $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ は (a), (b), (c) を満たすので簡約行列である.

(3) $\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{2} \end{bmatrix}$ は (a), (b), (c) を満たさないので簡約行列ではない. 基本変形

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{第 1 行に第 2 行} \times(-1) \text{ を足した} \\ \text{第 3 行に第 2 行} \times(-2) \text{ を足した} \end{array}$$

を行うと $\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ は (a), (b), (c) を満たすので簡約行列である.

□

定義 5-4 (行列の階数)

行列 A を簡約化したときの階段の段数を A の**階数**または**ランク**と呼び, $\mathrm{rank}(A)$ と表す.

行列の階数の求め方を確認しておきます.

例題 5-3

次の行列を簡約化し, 行列の階数を求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

[解答]

(1) 行列を簡約化する.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} && \text{第 1 行} \leftrightarrow \text{第 2 行} \\ &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} && \text{第 2 行に第 1 行} \times(-1) \text{ を足した} \end{aligned}$$

よって $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ の階数は 2.

(2) 行列を簡約化する.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} && \text{第 2 行に第 1 行} \times(-1) \text{ を足した} \\
&\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} && \text{第 2 行} \times(-1) \\
&\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} && \text{第 1 行に第 2 行} \times(-2) \text{ を足した}
\end{aligned}$$

よって $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ の階数は 2.

(3) 行列を簡約化する.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} && \text{第 2 行に第 1 行} \times(-2) \text{ を足した} \\
&\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} && \text{第 3 行に第 2 行} \times(-1) \text{ を足した} \\
&\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} && \text{第 3 行} \times(-1) \\
&\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} && \text{第 2 行に第 3 行} \times(-2) \text{ を足した}
\end{aligned}$$

よって $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ の階数は 3.

$\square$

[注意] 例題 5-3 の場合は「簡約化せよ」という指示があるので簡約化しましたが, もし階数を求めるだけで良いのならば, 簡約化を完成させる必要はありません. 例えば例題 5-3 (3) の場合,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} && \text{第 2 行に第 1 行} \times(-2) \text{ を足した} \\
&\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} && \text{第 3 行に第 2 行} \times(-1) \text{ を足した}
\end{aligned}$$

まで計算すれば階数が 3 であることが分かります.

問題 5-3 次の行列を簡約化し, 行列の階数を求めよ.

$$(1)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad (2)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

行列の階数は, 簡約化したときの階段の段数のことなので, 行列のサイズを超えることはありません. 従って次が成り立ちます.

定理 5-2

A が $m \times n$ 型行列ならば

$$\mathrm{rank}(A) \leqq m, \quad \mathrm{rank}(A) \leqq n.$$