# 線形代数 (第 6 回)

## 6 連立 1 次方程式の解法 II

連立 1 次方程式の解には次の 3 通りの可能性があります.

$$\begin{cases} \text{Case 1：} & \text{解はただ 1 つに定まる} & \longrightarrow \text{第 4 回} \\ \text{Case 2：} & \text{解は存在しない} & \longrightarrow \boxed{\text{今回}} \\ \text{Case 3：} & \text{解は無数に存在する} & \longrightarrow \text{次回} \end{cases}$$

第 4 回で扱った連立 1 次方程式はすべて Case 1 でしたが, Case 2 や Case 3 も起こり得ます. 今回は Case 2 について調べます. まずは, Case 2 とはどういう状況かについて例題で考えてみます.

**例題 6-1**

次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{cases} x - y + z = 5 \\ -x \qquad - 3z = -4 \\ x + 2y + 7z = 3 \end{cases}$$

[解答]

拡大係数行列を基本変形すると

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 7 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & -2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \text{2 行目に 1 行目 } \times 1 \text{ を足した} \\ \text{3 行目に 1 行目 } \times(-1) \text{ を足した} \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & -2 \end{array}\right] \quad \text{2 行目 } \times(-1)$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \text{1 行目に 2 行目 } \times 1 \text{ を足した} \\ \text{3 行目に 2 行目 } \times(-3) \text{ を足した} \end{array}$$

最後の行列を拡大係数行列とする連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x \qquad + 3z = 4 \\ \qquad y + 2z = -1 \\ \qquad\qquad 0 = 1 \end{cases} \quad (\leftarrow \text{左辺は } 0x + 0y + 0z \text{ だから } 0)$$

であるが, **3 式目は成り立たない**ので, 与えられた連立 1 次方程式は**解を持たない**.

□

この解答の最後の部分のように, 拡大係数行列を簡約化した後, 対応する連立 1 次方程式を考えることで解なしを結論づけても良いのですが, 行列の階数 (ランク) の言葉を使うと次の定理のようにまとめられます.

**定理 6-1**

次の同値が成り立つ.

$$\text{連立 1 次方程式 } A\vec{x} = \vec{b} \text{ が解を持つ} \iff \operatorname{rank}\left(\left[\begin{array}{c:c} A & \vec{b} \end{array}\right]\right) = \operatorname{rank}(A).$$

ここで, $\left[\begin{array}{c:c} A & \vec{b} \end{array}\right]$ は拡大係数行列を表す.

例題 6-1 で言うと,

- 係数行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \operatorname{rank}(A) = 2.$

- 拡大係数行列 $\left[\begin{array}{c:c} A & \vec{b} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 7 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

  $\therefore \operatorname{rank}(\left[\begin{array}{c:c} A & \vec{b} \end{array}\right]) = 3.$

よって, $\operatorname{rank}(A) \neq \operatorname{rank}(\left[\begin{array}{c:c} A & \vec{b} \end{array}\right])$ となり, 例題 6-1 の連立 1 次方程式は解を持たないことが分かります. つまり, 拡大係数行列の

**点線の左と右とで段数が変わっているかどうか**

ということですね. 定理 6-1 の適用には, 階数 (ランク) を確認すれば良いだけなので, **簡約化を完成させる必要はありません**.

**例題 6-2**

次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & -4 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

[解答]

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & -2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & -8 & -8 & -1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} 2\text{ 行目に }1\text{ 行目 }\times 1\text{ を足した} \\ 3\text{ 行目に }1\text{ 行目 }\times(-2)\text{ を足した} \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -8 & -8 & -1 \end{array}\right] \quad 2\text{ 行目 }\times\tfrac{1}{3}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} 1\text{ 行目に }2\text{ 行目 }\times(-3)\text{ を足した} \\ 3\text{ 行目に }2\text{ 行目 }\times 8\text{ を足した} \end{array}$$

係数行列の階数は 2 で, 拡大係数行列の階数は 3 であるので, 定理 6-1 より, 与えられた連立 1 次方程式は解を持たない.

□

**問題 6-1** 定理 6-1 を用いて, 次の連立 1 次方程式が解を持つかどうか調べよ.

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 4 \\ 2x + 3y + z = 4 \\ 3x - 4y - 7z = 10 \end{cases}$$

次の例題では, 文字を含むような連立 1 次方程式が解を持つ条件について調べます.

**例題 6-3**

次の連立 1 次方程式が解を持つための $a$, $b$ の条件を求めよ.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ \phantom{2x + {}} y - z = -a \\ x + 3y - z = b - 2a \end{cases}$$

[解答]

拡大係数行列を基本変形する.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -a \\ 1 & 3 & -1 & b-2a \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -1 & b-2a \\ 0 & 1 & -1 & -a \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \qquad 1\text{ 行目} \leftrightarrow 3\text{ 行目}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & b-2a \\ 0 & 1 & -1 & -a \\ 0 & -5 & 5 & 1+4a-2b \end{array}\right] \qquad 3\text{ 行目に } 1\text{ 行目 } \times(-2)\text{ を足した}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1-a-2b \end{array}\right] \qquad 3\text{ 行目に } 2\text{ 行目 } \times 5\text{ を足した}$$

よって

- $\mathrm{rank}(A) = 2$
- $\mathrm{rank}(\left[\begin{array}{c:c} A & \vec{b} \end{array}\right]) = \begin{cases} 2 & \cdots\ 1-a-2b = 0\text{ のとき}, \\ 3 & \cdots\ 1-a-2b \neq 0\text{ のとき}. \end{cases}$

定理 6-1 より

$$\text{解を持つ} \iff 1-a-2b = 0.$$

$\square$

**問題 6-2** 次の連立 1 次方程式が解を持つための $a$ の条件を求めよ.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & 3z & = & 6 \\ 2x & - & 2y & + & a^2z & = & 7 \end{array}\right.$$