

線形代数 (第6回) の解答

問題 6-1 の解答

拡大係数行列を基本変形する.

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & -7 & 10 \end{array} \right] &\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{array} \right] & \begin{array}{l} 2 \text{ 行目に } 1 \text{ 行目 } \times (-2) \text{ を足した} \\ 3 \text{ 行目に } 1 \text{ 行目 } \times (-3) \text{ を足した} \end{array} \\
 &\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] & 3 \text{ 行目 } \times \frac{1}{2} \\
 &\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 7 & -4 \end{array} \right] & 2 \text{ 行目 } \leftrightarrow 3 \text{ 行目} \\
 &\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right] & \begin{array}{l} 1 \text{ 行目に } 2 \text{ 行目 } \times 2 \text{ を足した} \\ 3 \text{ 行目に } 2 \text{ 行目 } \times (-7) \text{ を足した} \end{array}
 \end{aligned}$$

係数行列の階数は 2, 拡大係数行列の階数は 3 となるので, 連立 1 次方程式は解を持たない.

問題 6-2 の解答

拡大係数行列を基本変形する.

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & a^2 & 7 \end{array} \right] &\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & a^2 - 2 & 3 \end{array} \right] & \begin{array}{l} 2 \text{ 行目に } 1 \text{ 行目 } \times (-1) \text{ を足した} \\ 3 \text{ 行目に } 1 \text{ 行目 } \times (-2) \text{ を足した} \end{array} \\
 &\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2 - 2 & 3 \end{array} \right] & 2 \text{ 行目 } \times \frac{1}{2} \\
 &\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2 - 2 & 3 \end{array} \right] & 1 \text{ 行目に } 2 \text{ 行目 } \times 1 \text{ を足した}
 \end{aligned}$$

よって

$$\bullet \text{ rank}(A) = \begin{cases} 2 & \dots a^2 - 2 = 0 \text{ のとき,} \\ 3 & \dots a^2 - 2 \neq 0 \text{ のとき.} \end{cases}$$

- $\text{rank}\left(\left[A \mid \vec{b} \right]\right) = 3.$

定理 6-1 より

$$\text{解を持つ} \iff a^2 - 2 \neq 0 \iff a \neq \pm\sqrt{2}.$$