線形代数 (第 7 回) の解答

問題 7-1 の解答

拡大係数行列を基本変形すると

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & -7 & 10 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

2 行目に 1 行目 $\times(-2)$ を足した
3 行目に 1 行目 $\times(-3)$ を足した

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

2 行目 $\times\frac{1}{7}$
3 行目 $\times\frac{1}{2}$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

1 行目に 2 行目 $\times 2$ を足した
3 行目に 2 行目 $\times(-1)$ を足した

最後の行列を拡大係数行列とする連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x & & - & z & = & 2 \\ & y & + & z & = & -1 \end{cases}$$

であり，そのすべての解は

$$\begin{cases} x &=& a+2 \\ y &=& -a-1 \\ z &=& a \end{cases} \qquad (a \text{ は任意の実数})$$

問題 7-2 の解答

係数行列を基本変形すると

$$\begin{bmatrix} -4 & -12 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -6 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -4 & -12 & -3 \\ -2 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

1 行目 $\leftrightarrow$ 2 行目

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2 行目に 1 行目 $\times 4$ を足した
3 行目に 1 行目 $\times 2$ を足した

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1 行目に 2 行目 $\times(-1)$ を足した
3 行目に 2 行目 $\times(-1)$ を足した

copyright © 大学数学の授業ノート

最後の行列を係数行列とする同次形の連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

であり，そのすべての解は

$$\begin{cases} x = -3a \\ y = a \\ z = 0 \end{cases} \quad (a \text{ は任意の実数})$$

問題 7-3 の解答

係数行列を基本変形すると

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a+3 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & a & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & a+3 \\ 0 & 1-a & -3 \\ 0 & a & 2 \end{bmatrix}$$

2 行目に 1 行目 $\times(-1)$ を足した

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & a+3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & a & 2 \end{bmatrix}$$

2 行目に 3 行目 $\times 1$ を足した

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2a+3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{bmatrix}$$

1 行目に 2 行目 $\times(-a)$ を足した
3 行目に 2 行目 $\times(-a)$ を足した

定理 7-2 から与えられた連立 1 次方程式が非自明な解を持つことは, 係数行列の階数が 2 以下になることと同値である. よって $a = -2$ となる. このとき, 上記の基本変形の最後の行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であり, 対応する連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

で, そのすべての解は

$$x = y = z = b \quad (b \text{ は任意の実数})$$