線形代数 (第 8 回)

8 正則行列

今回は正則行列について解説します. まずは例を挙げます. 次の 2 つの行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

の間には

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

という関係があります. つまり, 行列 A には<u>掛けたら単位行列になる行列 B があります</u>. 一方, 行列 $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ にはそのような行列はありません. 実際,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と立式しても,

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ 2a + 4c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b + 2d = 0 \\ 2b + 4d = 1 \end{cases}$$

となり, これを満たす a, b, c, d は存在しません. 上の A のように, 掛けたら単位行列になる行列があるとき, **正則行列**と呼びます.

定義 8.1 (正則行列)
n 次正方行列 A に対して,

$$AB = BA = E_n \ (\leftarrow \text{単位行列}) \qquad \cdots (*)$$

を満たす n 次正方行列 B が存在するとき, A は**正則行列**と言う. また, $(*)$ を満たす B のことを A の**逆行列**と呼び, A^{-1} で表す.

正則行列の性質をみていきます.

定理 8-1

正則行列 A の逆行列はただ 1 つ.

[証明]

B と C がともに定義 8.1 の $(*)$ を満たすとする．つまり,

$$AB = BA = E_n \quad \text{かつ} \quad AC = CA = E_n.$$

このとき,

$$B = BE_n = B(AC) = (BA)C = E_nC = C.$$

よって, A の逆行列はただ 1 つである.

$\square$

定理 8-2

$AB = E_n$ のとき, A も B も正則行列で $A^{-1} = B$, $B^{-1} = A$.

定理 8-2 から, A が正則であることを示すには,

$$AB = E_n \quad \text{または} \quad BA = E_n$$

のいずれか一方だけ言えばよいことになります．定理 8-2 の証明は, 行列式を解説する際に与える予定です.

定理 8-3

n 次正方行列 A に対して, 次が成り立つ.

$$\mathrm{rank}(A) = n \iff A \text{ は正則行列}.$$

定理 8-3 の言っていることは, 要するに

A が正則行列かどうか判定する為には, A の階数（ランク）を見れば良い！

ということです．定理 8-3 の証明は参考文献 [1] の定理 2.4.2 を参照にしてください.

例題 8-1

次が正則行列であるかどうか判定せよ.

$$(1)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad (2)\ B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[解答]

(1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2 行目に 1 行目 $\times(-1)$ を足した
3 行目に 1 行目 $\times(-1)$ を足した

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2 行目 $\times(-1)$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1 行目に 2 行目 $\times(-2)$ を足した

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1 行目に 3 行目 $\times 4$ を足した
2 行目に 3 行目 $\times(-3)$ を足した

よって, $\mathrm{rank}(A) = 3$ より, A は正則行列である.

(2)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2 行目に 1 行目を足した
3 行目に 1 行目 $\times(-1)$ を足した

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2 行目 $\times(-\frac{1}{2})$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1 行目に 2 行目を足した
3 行目に 2 行目 $\times(-1)$ を足した

よって, $\mathrm{rank}(B) = 2 \neq 3$ より, B は正則行列でない.

$\square$

問題 8-1 次が正則行列であるかどうか判定せよ.

$$(1)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad (2)\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

次に逆行列の求め方を説明します. n 次正方行列 A に対して, 左半分に A, 右半分に単位行列 E を配置して

$$\left[\begin{array}{c:c} A & E \end{array}\right]$$

を考えます. 例えば, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ の場合は,

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

を考えます. このように, A と単位行列 E をくっつけてできた横長の行列を 1 つの行列だと思います. この行列の左半分に配置した $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ の部分を簡約化したとき, 単位行列になったとします. このとき,

A は正則行列であり, さらに右半分に A の逆行列が出てきます!

このような方法で逆行列を求められる理由については参考文献 [1] の p.35 を参照にしてください.

例題 8-2

次が正則行列かどうかを判定し, 正則行列ならばその逆行列を求めよ.

$$(1)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad (2)\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad (3)\ C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[解答]

(1)

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right] \qquad 2 \text{ 行目に } 1 \text{ 行目 } \times(-4) \text{ を足した}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right] \qquad 2 \text{ 行目 } \times(-1)$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right] \qquad 1 \text{ 行目に } 2 \text{ 行目 } \times(-1) \text{ を足した}$$

よって, A は正則行列で, 逆行列は $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$.

(2)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} 2\text{ 行目に }1\text{ 行目 }\times(-1)\text{ を足した} \\ 3\text{ 行目に }1\text{ 行目 }\times(-2)\text{ を足した} \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} 1\text{ 行目に }2\text{ 行目 }\times(-1)\text{ を足した} \\ 3\text{ 行目に }2\text{ 行目を足した} \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right] \quad 3\text{ 行目 }\times(-1)$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} 1\text{ 行目に }3\text{ 行目 }\times(-3)\text{ を足した} \\ 2\text{ 行目に }3\text{ 行目を足した} \end{array}$$

よって, B は正則行列であり, 逆行列は

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(3)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} 2\text{ 行目に }1\text{ 行目を足した} \\ 3\text{ 行目に }1\text{ 行目 }\times(-1)\text{ を足した} \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad 2\text{ 行目 }\leftrightarrow 3\text{ 行目}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} 1\text{ 行目に }2\text{ 行目を足した} \\ 3\text{ 行目に }2\text{ 行目 }\times 2\text{ を足した} \end{array}$$

よって, $\mathrm{rank}(C) = 2 \neq 3$ より, C は正則行列ではない. □

★ 例題 8-2 (3) のように, 結論が正則ではない場合には, 点線より右側に出てくる行列は何の意味も持ちません. 書いただけ無駄になりますが, 問題を解き始める段階では結論が正則かそうでないかは判断できないので, とりあえず右側も付けて計算しておいて, 正則でない場合は無視してください.

問題 8-2 次が正則行列かどうかを判定し, 正則行列ならば逆行列を求めよ.

$$(1)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad (2)\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

例題 8-3

A を正則行列とする.

(1) A^{-1} も正則で $(A^{-1})^{-1} = A$ となることを示せ.

(2) ${}^tA$ も正則で $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ となることを示せ.

[解答]

(1) A が正則ならば, $AA^{-1} = E$ (E は単位行列) なので, 定理 8-2 より A^{-1} も正則で, $(A^{-1})^{-1} = A$ となる.

(2) A が正則ならば $AA^{-1} = E$ なので, 両辺を転置すると ${}^t(AA^{-1}) = {}^tE = E$. 一方, ${}^t(AA^{-1}) = {}^t(A^{-1})\ {}^tA$ ($\because$ 第 3 回資料) であるので ${}^t(A^{-1}){}^tA = E$ となり, 定理 8-2 から, ${}^tA$ は正則で $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ となる.

□

問題 8-3 A, B を n 次正方行列とする.

(1) A と B がともに正則ならば, AB も正則で $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ となることを示せ.

(2) AB が正則ならば, A, B はともに正則であることを示せ.

参考文献

[1] 三宅 敏恒, 線形代数学, 培風館.