線形代数 (第8回) の解答

問題 8-1 の解答

(1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{2 行目に 1 行目} \times(-2) \text{ を足した}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{1 行目に 2 行目} \times(-1) \text{ を足した}$$

よって, $\mathrm{rank}(A) = 2$ より, A は正則である.

(2)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{1 行目} \leftrightarrow \text{2 行目}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{3 行目に 1 行目} \times(-1) \text{ を足した}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{3 行目に 2 行目} \times(-1) \text{ を足した}$$

よって, $\mathrm{rank}(B) = 2 \neq 3$ より, B は正則でない.

問題 8-2 の解答

(1)

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} 2\text{ 行目に }1\text{ 行目 }\times(-1)\text{ を足した} \\ 3\text{ 行目に }1\text{ 行目 }\times(-1)\text{ を足した} \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} 1\text{ 行目に }2\text{ 行目 }\times(-1)\text{ を足した} \\ 3\text{ 行目に }2\text{ 行目 }\times(-1)\text{ を足した} \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \qquad 2\text{ 行目に }3\text{ 行目 }\times(-1)\text{ を足した}$$

よって, A は正則で, 逆行列は

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad 2\text{ 行目に }1\text{ 行目 }\times(-2)\text{ を足した}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad 2\text{ 行目 }\leftrightarrow 3\text{ 行目}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} 1\text{ 行目に }2\text{ 行目 }\times(-2)\text{ を足した} \\ 3\text{ 行目に }2\text{ 行目 }\times 3\text{ を足した} \end{array}$$

よって, $\mathrm{rank}(B) = 2 \neq 3$ より, B は正則ではない.

問題 8-3 の解答

(1) A と B が正則ならば, $AA^{-1} = BB^{-1} = E$ である.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E.$$

定理 8-2 より, AB は正則で $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(2) AB が正則ならば, $E = (AB)C = C(AB)$ を満たす行列 C がある. $E = A(BC) = (CA)B$ なので, 定理 8-2 から, A, B はともに正則である.