線形代数 (第10回)

10　行列式の定義と性質

今回は行列の性質を調べる上で重要となる**行列式**について解説します.

定義 10-1 (行列式)

n 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

に対して,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \qquad \cdots (*)$$

と定義し, これを A の**行列式**と呼ぶ. ただし, S_n は n 文字置換すべての集合とする. A の行列式は $\det(A)$ や $|A|$, また

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

とも表す.

(注 1) 行列<u>式</u>という名前だが, 行列式を計算した結果は数になる.

(注 2) det は行列式を表す英単語 determinant の頭文字.

まずは $n = 2$ の行列式について考えます. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ の場合に $(*)$ を書くと

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_2} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \qquad \cdots ①$$

ここで, $\displaystyle\sum_{\sigma \in S_2}$ は 2 文字置換すべてについての和をとることを意味します. 2 文字置換は

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \varepsilon, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (1, 2)$$

の 2 種類なので, $S_2 = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ となります. 従って①の右辺を $\sum$ を使わずに書き直すと

$$\det(A) = \mathrm{sgn}(\sigma_1) a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} + \mathrm{sgn}(\sigma_2) a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)}.$$

ここで, $\mathrm{sgn}(\sigma_1) = 1,\ \sigma_1(1) = 1,\ \sigma_1(2) = 2$ より

$$\mathrm{sgn}(\sigma_1) a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} = a_{11} a_{22}$$

であり, また $\mathrm{sgn}(\sigma_2) = -1,\ \sigma_2(1) = 2,\ \sigma_2(2) = 1$ より

$$\mathrm{sgn}(\sigma_2) a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)} = -a_{12} a_{21}.$$

よって

$$\det(A) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

定理としてまとめておきます.

定理 10-1

2 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

の行列式は

$$\det(A) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ の行列式は, 定理 10-1 より

$$\det(A) = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 4 = -11.$$

次に $n = 3$ の場合を考えます. 行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

の場合に $(*)$ を書くと

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \qquad \cdots ②$$

ここで, $\displaystyle\sum_{\sigma \in S_3}$ は 3 文字置換すべてについての和をとることを意味します. 前回の例題 9-1 から 3 文字置換は

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \varepsilon \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2, 3)$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,2) \qquad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,2,3) = (1,3)(1,2)$$
$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1,3,2) = (1,2)(1,3) \qquad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,3)$$

の 6 種類なので, $S_3 = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_6\}$ となり, ② を $\sum$ を使わずに書き直すと

$$\begin{aligned}\det(A) = &\operatorname{sgn}(\sigma_1) a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} a_{3\sigma_1(3)} + \operatorname{sgn}(\sigma_2) a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)} a_{3\sigma_2(3)} \\ &+ \operatorname{sgn}(\sigma_3) a_{1\sigma_3(1)} a_{2\sigma_3(2)} a_{3\sigma_3(3)} + \operatorname{sgn}(\sigma_4) a_{1\sigma_4(1)} a_{2\sigma_4(2)} a_{3\sigma_4(3)} \\ &+ \operatorname{sgn}(\sigma_5) a_{1\sigma_5(1)} a_{2\sigma_5(2)} a_{3\sigma_5(3)} + \operatorname{sgn}(\sigma_6) a_{1\sigma_6(1)} a_{2\sigma_6(2)} a_{3\sigma_6(3)}.\end{aligned}$$

右辺の各項を計算すると,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sgn}(\sigma_1) = 1,\ \sigma_1(1) = 1,\ \sigma_1(2) = 2,\ \sigma_1(3) = 3 \text{ より}, \\
&\qquad\qquad \operatorname{sgn}(\sigma_1) a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} a_{3\sigma_1(3)} = a_{11}a_{22}a_{33}. \\
&\operatorname{sgn}(\sigma_2) = -1,\ \sigma_2(1) = 1,\ \sigma_2(2) = 3,\ \sigma_2(3) = 2 \text{ より}, \\
&\qquad\qquad \operatorname{sgn}(\sigma_2) a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)} a_{3\sigma_2(3)} = -a_{11}a_{23}a_{32}. \\
&\operatorname{sgn}(\sigma_3) = -1,\ \sigma_3(1) = 2,\ \sigma_3(2) = 1,\ \sigma_3(3) = 3 \text{ より}, \\
&\qquad\qquad \operatorname{sgn}(\sigma_3) a_{1\sigma_3(1)} a_{2\sigma_3(2)} a_{3\sigma_3(3)} = -a_{12}a_{21}a_{33}. \\
&\operatorname{sgn}(\sigma_4) = 1,\ \sigma_4(1) = 2,\ \sigma_4(2) = 3,\ \sigma_4(3) = 1 \text{ より}, \\
&\qquad\qquad \operatorname{sgn}(\sigma_4) a_{1\sigma_4(1)} a_{2\sigma_4(2)} a_{3\sigma_4(3)} = a_{12}a_{23}a_{31}. \\
&\operatorname{sgn}(\sigma_5) = 1,\ \sigma_5(1) = 3,\ \sigma_5(2) = 1,\ \sigma_5(3) = 2 \text{ より}, \\
&\qquad\qquad \operatorname{sgn}(\sigma_5) a_{1\sigma_5(1)} a_{2\sigma_5(2)} a_{3\sigma_5(3)} = a_{13}a_{21}a_{32}. \\
&\operatorname{sgn}(\sigma_6) = -1,\ \sigma_6(1) = 3,\ \sigma_6(2) = 2,\ \sigma_6(3) = 1 \text{ より}, \\
&\qquad\qquad \operatorname{sgn}(\sigma_6) a_{1\sigma_6(1)} a_{2\sigma_6(2)} a_{3\sigma_6(3)} = -a_{13}a_{22}a_{31}.
\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}\det(A) = &a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &+ a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.\end{aligned}$$

定理 10-2

3 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

の行列式は

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &\quad + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

3 次行列

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

の行列式を計算してみます．定理 10-2 より

$$\begin{aligned} \det(A) &= 4 \cdot 1 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + (-5) \cdot 2 \cdot 5 - (-5) \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 8 - 60 - 8 + 6 - 50 + 5 \\ &= -99. \end{aligned}$$

2 次行列と 3 次行列の行列式の公式を見てきましたが, 公式を文字列として暗記するのは困難です．そこで, ビジュアル的に理解できる**サラスの方法**について説明しておきます.

★ まずは 2 次行列についてです.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a_{11}a_{22}} - \boldsymbol{a_{12}a_{21}}$$

右斜め下向き（赤）はプラス！　　左斜め下向き（青）はマイナス！

★ 3 次行列は少し複雑です.

右斜め下向き（赤）は３本あり，これらはプラス！

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

左斜め下向き（青）は３本あり，これらはマイナス！

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

以上の図のような赤・青のイメージで**プラス**・**マイナス**に気をつけましょう！

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a_{11}a_{22}a_{33}} + \boldsymbol{a_{12}a_{23}a_{31}} + \boldsymbol{a_{13}a_{21}a_{32}}$$
$$- \boldsymbol{a_{11}a_{23}a_{32}} - \boldsymbol{a_{12}a_{21}a_{33}} - \boldsymbol{a_{13}a_{22}a_{31}}$$

例題 10-1

次の行列式を計算せよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

[解答]

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 2.$$

(2)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

(3)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 6 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1$$
$$- 1 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 6 - 2 \cdot 5 \cdot 1$$
$$= 30 + 4 + 0 - 2 - 0 - 10 = 22.$$

(4)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 \cdot 6 + (-5) \cdot 2 \cdot (-1)$$
$$- 1 \cdot 4 \cdot (-1) - (-2) \cdot 2 \cdot 1 - (-5) \cdot 3 \cdot 6$$
$$= 3 - 48 + 10 + 4 + 4 + 90 = 63.$$

□

問題 10-1 次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

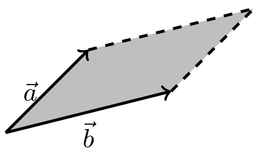
問題 10-2 次の行列式が 0 になる条件を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

行列式を計算することにどんな意味・価値があるのでしょうか? ここでは行列式の図形的な意味について紹介しておきます.

定理 10-3

$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ の張る平行四辺形の面積は行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ の絶対値である.



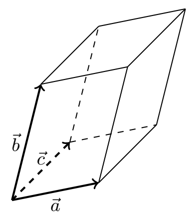
問題 10-3 $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ の張る平行四辺形の面積 S を求めよ.

定理 10-4

$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ $\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ の張る平行六面体の体積は行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

の絶対値である.



例題で定理の使い方を確認しておきます.

例題 10-2

3 つのベクトル $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ の張る平行六面体の体積を求めよ.

[解答]
定理 10-4 より

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} &= (-1) \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 2 \\ &\quad - (-1) \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 0 \\ &= -3 + 0 + 4 + 2 - 6 - 0 = -3. \end{aligned}$$

よって絶対値を取って, 体積は 3 である. □

問題 10-4 3 つのベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ の張る平行六面体の体積 $V(a)$ が 2 となる実数 a を求めよ.