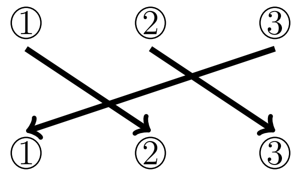
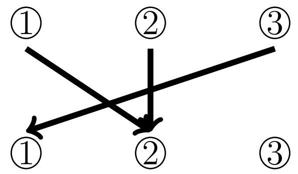
線形代数 (第 9 回)

9 置換

ここに, 3 つの玉があるとします. その 3 つの玉の置換 (=並べ替え) を考えます. 例えば



これは「① が ② へ行き」,「② が ③ へ行き」,「③ が ① へ行く」という置換です. 一方,



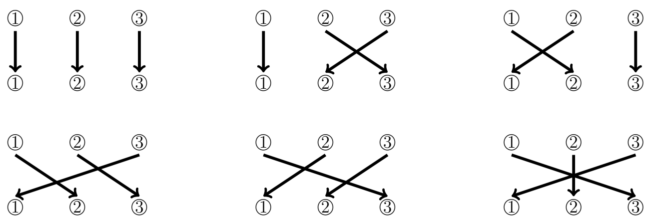
は置換ではありません. 行き先に重複があり, 並べ替えになっていないからです.

例題 9-1

3 つの玉の置換は全部で何種類あるか?

[解答]

${}_3\mathrm{P}_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ (種類) となる. 全部書き上げると



□

置換を矢印の図で書く代わりに, 記号で表すことにします. 例えば, 例題 9-1 の 6 個の置換はそ

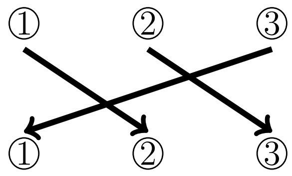
れぞれ

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

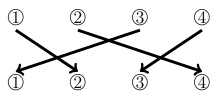
で表します．これは上段と下段を対応付けた表のような記法で, 例えば

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$$

ならば,「1 が 2 へ行き」,「2 が 3 へ行き」,「3 が 1 に行く」ことを表します．つまり,



問題 9-1　次の 4 つの玉の置換を記号で表せ.



定義 9-1 (置換)

n 個の文字 $\{1, 2, \ldots, n\}$ から $\{1, 2, \ldots, n\}$ への 1 対 1 の写像を n **文字の置換** という．n 文字の置換 σ が

$$1 \to k_1, \quad 2 \to k_2, \quad \cdots, \quad n \to k_n$$

という写像のとき,

$$\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n\end{pmatrix}$$

で表す．つまり, 下の数字は上の数字の行き先を表す.

★ 置換はギリシア文字で表すことが多く, σ (シグマ), τ (タウ), ρ (ロー) などをよく用いる.

例えば, $\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$ とすると,

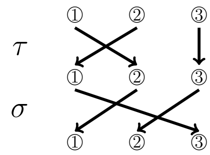
$$\sigma(1) = 3, \quad \sigma(2) = 1, \quad \sigma(3) = 4, \quad \sigma(4) = 2.$$

$\sigma(1)$ などの記法の意味は, 関数 $f(x)$ に $x = 1$ を代入した数を $f(1)$ と書くのと同じです. つまり, 置換 σ による 1 の行き先を $\sigma(1)$ と書きます.

次に置換の積について考えます. 2 つの置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

に対して, 積 $\sigma\tau$ は τ, σ の順に連続して置換を行うことで得られる置換とします. つまり,



ということで, 「① は ① へ行く」,「② は ③ へ行く」, 「③ は ② に行く」ことを表します. よって

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

定義 9-2 (置換の積)

2 つの n 文字の置換 σ, τ の**積** $\sigma\tau$ を

$$(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i)) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

で定義する.

重要な注意点として,

積 $\sigma\tau$ は, τ が先で次に σ を計算する

つまり,

右に書いてある置換から順に計算して行きます！

3 つの置換の積 $\sigma\tau\rho$ ならば, 1 番目に ρ, 2 番目に τ, 3 番目に σ を計算します.

例題 9-2

4 文字の置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ を考える.

(1) 積 $\sigma\tau$ を求めよ.

(2) 積 $\tau\sigma$ を求めよ.

[解答]

(1)

$$\begin{aligned} (\sigma\tau)(1) &= \sigma(\tau(1)) = \sigma(3) = 3, \\ (\sigma\tau)(2) &= \sigma(\tau(2)) = \sigma(1) = 2, \\ (\sigma\tau)(3) &= \sigma(\tau(3)) = \sigma(2) = 4, \\ (\sigma\tau)(4) &= \sigma(\tau(4)) = \sigma(4) = 1. \end{aligned}$$

よって, $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

(2)

$$\begin{aligned} (\tau\sigma)(1) &= \tau(\sigma(1)) = \tau(2) = 1, \\ (\tau\sigma)(2) &= \tau(\sigma(2)) = \tau(4) = 4, \\ (\tau\sigma)(3) &= \tau(\sigma(3)) = \tau(3) = 2, \\ (\tau\sigma)(4) &= \tau(\sigma(4)) = \tau(1) = 3. \end{aligned}$$

よって, $\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

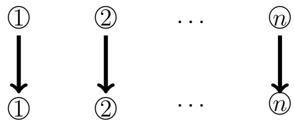
□

例題 9-2 から分るように, $\sigma\tau$ と $\tau\sigma$ は異なります. つまり,

置換の積は可換ではない！

に注意してください.

n 文字の置換で,

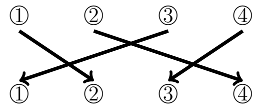


のように行き先を変えない置換を**恒等置換**と呼び, ε で表します. つまり,

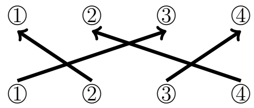
$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

次に逆置換について説明します. 例えば,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

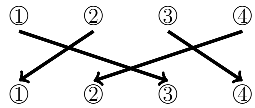


の逆向きの対応



は「① は ③ へ行き」, 「② は ① へ行き」, 「③ は ④ へ行き」, 「④ は ② へ行く」という置換なので

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$



このように置換 σ に対して, 逆向きの対応を与える置換を σ の**逆置換**と言い, σ^{-1} で表します.

例題 9-3

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ の逆置換 σ^{-1} を求めよ.

[解答]

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} && \sigma \text{ の上下を逆転させる} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} && \text{上下のペアを保ったまま上段を整列する} \end{aligned}$$

□

問題 9-2 次の置換の積を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$

次は巡回置換について説明します. 置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

を考えます. σ において, 数字 1, 3, 5 は

$$\sigma: \ 1 \mapsto 3 \mapsto 5 \mapsto 1 \mapsto 3 \mapsto \cdots$$

と巡回しており, それ以外の $2, 4$ は動いていません. 一方, τ は,

$$\tau: \ 1 \mapsto 3 \mapsto 5 \mapsto 1 \mapsto 3 \mapsto \cdots, \quad 2 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 4 \mapsto \cdots,$$

と巡回部分が 2 つあります. σ のように巡回部分が一つだけの置換を**巡回置換**と言います.

定義 9-3 (巡回置換)
n 文字の置換 σ が

$$k_1 \mapsto k_2 \mapsto k_3 \mapsto \cdots \mapsto k_r \mapsto k_1 \mapsto k_2 \mapsto \cdots$$

という巡回部分を持ち, $k_1, k_2, ..., k_r$ 以外の数字は動かさないとき, σ は**長さ r の巡回置換**といい, $\sigma = (k_1, k_2, \cdots, k_r)$ で表す. 特に, 長さ 2 の巡回置換を**互換**という.

例えば, 5 文字の置換 $\sigma = (1,2,5)$ は $1 \mapsto 2 \mapsto 5 \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto \cdots$ という巡回部分を持ち, 他の文字は動かしません. よって

$$\sigma(1) = 2, \ \sigma(2) = 5, \ \sigma(3) = 3, \ \sigma(4) = 4, \ \sigma(5) = 1.$$

つまり,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

例題 9-4
4 文字の置換 $\sigma = (1,3,2)$ と $\tau = (1,4)$ の積 $\sigma\tau$ を求めよ.

[解答]

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{aligned} \sigma\tau(1) &= \sigma(\tau(1)) = \sigma(4) = 4, \\ \sigma\tau(2) &= \sigma(\tau(2)) = \sigma(2) = 1, \\ \sigma\tau(3) &= \sigma(\tau(3)) = \sigma(3) = 2, \\ \sigma\tau(4) &= \sigma(\tau(4)) = \sigma(1) = 3. \end{aligned}$$

よって

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

□

問題 9-3 次の 4 文字の置換の積を計算せよ.

(1) $(1, 2, 3, 4)(1, 2)$ (2) $(1, 3, 4)(1, 2, 3)(1, 2, 4)$

定理 9-1

すべての置換は巡回置換のいくつかの積で書ける.

具体例で考えてみます. 置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 10 & 8 & 4 & 2 & 7 & 6 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

を巡回置換の積で表してみます. まず, 1 からスタートし, 順にたどっていくと,

$$1 \mapsto 5 \mapsto 2 \mapsto 10 \mapsto 1$$

であるので, 1 つ目の因子として巡回置換 $(1, 5, 2, 10)$ があることが分かります. 次に, 上で出てこなかった 3 からスタートし, 順にたどっていくと,

$$3 \mapsto 8 \mapsto 9 \mapsto 3$$

であるので, 2 つ目の因子として巡回置換 $(3, 8, 9)$ があります. 次に, 今まで出てきていない 4 からスタートし, 順にたどっていきますが, σ は 4 を動かさないので, 巡回置換 (4) ($\leftarrow$ 単位置換) が次の因子です. 更に, まだ出て来ていない 6 からスタートし, 順にたどっていくと,

$$6 \mapsto 7 \mapsto 6$$

であるので, 4 つ目の因子として巡回置換 $(6,7)$ があります.

これで, $1,2,...,10$ まで全て調べ終わりました. 以上により, 答えは

$$\sigma=(1,5,2,10)(3,8,9)(4)(6,7)$$

となります. (4) は単位置換であるから省略して,

$$\sigma=(1,5,2,10)(3,8,9)(6,8)$$

としても構いません.

問題 9-4 $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\10&3&9&7&2&8&4&6&1&5\end{pmatrix}$ を巡回置換の積に分解せよ.

定理 9-2
すべての置換は互換の積で書ける.

手順としては下記の通りです.

STEP1： 巡回置換の積に分解する.
STEP2： Step1 で得た巡回置換をそれぞれ公式

$$\boxed{(k_1,k_2,\ldots,k_r)=(k_1,k_r)(k_1,k_{r-1})\cdots(k_1,k_3)(k_1,k_2)}$$

を使って互換の積に分解する.

上の手順を具体例で確かめます.

例題 9-5

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\7&6&8&2&1&4&9&3&5\end{pmatrix}$$ を互換の積で表せ.

[解答]

σ を巡回置換の積に分解すると

$$1\mapsto 7\mapsto 9\mapsto 5\mapsto 1,\quad 2\mapsto 6\mapsto 4\mapsto 2,\quad 3\mapsto 8\mapsto 3$$

より $\sigma = (1,7,9,5)(2,6,4)(3,8)$. 次に, それぞれの巡回置換を互換の積に分解すると,

$$(1,7,9,5) = (1,5)(1,9)(1,7), \quad (2,6,4) = (2,4)(2,6).$$

よって $\sigma = (1,5)(1,9)(1,7)(2,4)(2,6)(3,8)$.

$\square$

定義 9-4 (符号)

置換 σ が m 個の互換の積で書けるとき,

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^m$$

とし, σ の**符号**と呼ぶ. また, $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ のとき σ を**偶置換**と言い, $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ のとき σ を**奇置換**と言う. ただし, σ が単位置換のときは, $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ とする.

定義 9-4 を例題で確認しておきます.

例題 9-6

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 10 & 8 & 4 & 2 & 7 & 6 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ を互換の積に分解し, 符号を求めよ.

[解答]

σ を巡回置換の積に分解すると,

$$\sigma = (1,5,2,10)(3,8,9)(6,7).$$

次に, それぞれの巡回置換を互換の積に分解すると,

$$(1,5,2,10) = (1,10)(1,2)(1,5), \qquad (3,8,9) = (3,9)(3,8)$$

となるので, σ の互換の積への分解は次の通り.

$$\sigma = (1,10)(1,2)(1,5)(3,9)(3,8)(6,7).$$

σ は 6 個の互換の積に分解されたので, σ の符号は $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^6 = 1$.

$\square$

問題 9-5 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 2 & 1 & 4 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ を互換の積に分解し, 符号を求めよ.