

線形代数 (第10回) の解答

問題 10-1 の解答

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 7 = -23.$$

(2)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2.$$

(3)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \cdot 1 \\ &\quad - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 3 \cdot 3 \\ &= 3 + 12 + 0 - 2 - 2 - 0 = 11. \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} &= a \cdot c \cdot b + b \cdot a \cdot c + c \cdot b \cdot a \\ &\quad - a \cdot a \cdot a - b \cdot b \cdot b - c \cdot c \cdot c \\ &= -(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc). \end{aligned}$$

問題 10-2 の解答

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} &= 1 \cdot b \cdot c^2 + a \cdot b^2 \cdot 1 + a^2 \cdot 1 \cdot c \\ &\quad - 1 \cdot b^2 \cdot c - a \cdot 1 \cdot c^2 - a^2 \cdot b \cdot 1 \\ &= bc^2 + ab^2 + a^2c - b^2c - ac^2 - a^2b \\ &= (a-b)(b-c)(c-a). \end{aligned}$$

よって行列式が0になるのは、 $a = b$ または $b = c$ または $a = c$ のときである。

問題 10-3 の解答

定理 10-3 より, 求める面積は

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -5$$

の絶対値なので $S = 5$ である.

問題 10-4 の解答

平行 6 面体の体積は

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + a$$

の絶対値なので $V(a) = |a^2 - a|$ である.

(i) $a^2 - a < 0$ のとき, $2 = V(a) = -a^2 + a$ となるが, これを満たす a は存在しない.

(ii) $a^2 - a \geq 0$ のとき, $2 = V(a) = a^2 - a$ より $a = 2, -1$.

以上より $a = 2, -1$.