線形代数 (第 11 回)

11　行列式の計算 I

前回は行列式を定義し, 2 次, 3 次の行列式についてサラスの方法を用いて計算しました. 今回は行列式の性質をいくつか紹介し, 4 次以上の行列式の計算方法についてみます. まずは, 行列式に関して定理を 4 つ述べます. 証明は後からまとめて説明します.

定理 11-1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例えば,

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

などと変形できます.

例題 11-1

次が成り立つことを示せ.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

[解答]

定理 11-1 を繰り返し用いると,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

□

(注意) 上の例題と同様に考えると, 単位行列の行列式は 1 であることが分かります.

定理 11-2

1 つの行を c 倍すると行列式は **c 倍になる**.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{c}a_{i1} & \cdots\cdots & \boldsymbol{c}a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \boldsymbol{c} \times \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots\cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例えば,

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{1 行目から } -1 \text{ をくくり出した}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{3 行目から 2 をくくり出した}$$

と変形できます.

定理 11-3

2 つの行を入れ替えると行列式は $\boxed{\mathbf{-1\ 倍になる}}$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例えば,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad 1\ 行目 \leftrightarrow 3\ 行目$$

となる.

定理 11-4

行列の 1 つの行に他の行の何倍かを加えても, 行列式の値は $\boxed{\mathbf{変わらない}}$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + ca_{j1} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{in} + ca_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例えば,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 7 \\ -1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & -5 \end{vmatrix} \qquad 2\ 行目に\ 1\ 行目\ \times 2\ を足した$$

と変形できる.

次に定理 11-1～11-4 を用いて 4 次以上の行列式を計算してみます．方針は

定理 11-1 を使える形まで基本変形し，行列のサイズを 1 つ小さくする！

というものです．この方法で, 3 次以下の行列式に変形できれば, サラスの方法で行列式を求めることができます.

例題 11-2

次の行列式を計算せよ.

$$(1)\ \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad (2)\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 4 \\ -2 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

[解答]

(1) について.

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{11\text{-}3}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad 1\text{ 行目} \leftrightarrow 2\text{ 行目}$$

$$\overset{11\text{-}4}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \qquad 4\text{ 行目に } 1\text{ 行目 } \times 1 \text{ を足した}$$

$$\overset{11\text{-}1}{=} -1 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{サラス}}{=} 1 \times \{2 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 2\}$$

$$= -(-2 + 12 + 3 - 12 + 3 - 2)$$

$$= -2.$$

(2) について.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 4 \\ -2 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{11-4}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -12 & 4 \\ 0 & -2 & 12 & 9 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} 2\text{ 行目に }1\text{ 行目 }\times(-3)\text{ を足した} \\ 3\text{ 行目に }1\text{ 行目 }\times 2\text{ を足した} \end{array}$$

$$\overset{\text{11-1}}{=} 1 \times \begin{vmatrix} 4 & -12 & 4 \\ -2 & 12 & 9 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{11-2}}{=} 1 \times 4 \times \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 12 & 9 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix} \qquad 1\text{ 行目の }4\text{ をくくり出した}$$

$$\begin{aligned} &\overset{\text{サラス}}{=} 4 \times \Big\{ 1 \cdot 12 \cdot 1 + (-3) \cdot 9 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) \cdot (-4) \\ &\qquad\qquad - 1 \cdot 9 \cdot (-4) - (-3) \cdot (-2) \cdot 1 - 1 \cdot 12 \cdot 4 \Big\} \\ &= 4(12 - 108 + 8 + 36 - 6 - 48) \\ &= -424. \end{aligned}$$

□

問題 11-1 次の行列式を計算せよ.

$$(1) \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (2) \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

定理の証明について触れておきます. 一般の証明は初めて勉強する場合は少し難しいかと思いますので, ここでは $n = 3$ の場合に証明のアイデアを紹介します. 一般的な場合に関しては文献 [1] などを参考にしてください.

まず, 3 文字置換全体 $S_3 = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_6\}$ を次のように置きます.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \varepsilon \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2,3)$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,2) \qquad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,2,3) = (1,3)(1,2)$$

$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1,3,2) = (1,2)(1,3) \qquad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,3)$$

定理 11-1 (3 次の場合)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

[証明]

行列式の定義から

$$(\text{左辺}) = \sum_{\sigma \in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}.$$

$\sigma(1) \neq 1$ と仮定すると, $\sigma(2)$ または $\sigma(3)$ のどちらかは 1 なので, $\sigma_{2\sigma(2)} = a_{21}$ または $\sigma_{3\sigma(3)} = a_{31}$ のどちらかが成り立つ. $a_{21} = a_{31} = 0$ より, σ_i $(i = 3, 4, 5, 6)$ に対して,

$$a_{1\sigma_i(1)} a_{2\sigma_i(2)} a_{3\sigma_i(3)} = 0.$$

従って

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{\sigma \in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \\
&= \mathrm{sgn}(\sigma_1) a_{11} a_{22} a_{33} + \mathrm{sgn}(\sigma_2) a_{11} a_{23} a_{32} \\
&= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} \\
&= a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) \\
&= (\text{右辺}).
\end{aligned}$$

□

定理 11-2 (3 次の場合)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

[証明]

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \sum_{\sigma\in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot ca_{2\sigma(2)}\cdot a_{3\sigma(3)}\\ &= c\sum_{\sigma\in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot a_{3\sigma(3)}\\ &= (\text{右辺})\end{aligned}$$

□

定理 11-3 (3 次の場合)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}$$

[証明]

$\tau_i = \sigma_i\cdot(2,3)\ \ (i=1,2,...,6)$ と置く. sgn の定義から $\mathrm{sgn}(\tau_i) = -\mathrm{sgn}(\sigma_i)$ であり,

$$\tau_1 = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} = \sigma_2,\qquad \tau_2 = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} = \sigma_1,\qquad \tau_3 = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} = \sigma_4,$$
$$\tau_4 = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} = \sigma_3,\qquad \tau_5 = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} = \sigma_6,\qquad \tau_6 = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} = \sigma_5$$

$\tau_1,\tau_2,...,\tau_6$ は S_3 全体と一致するので,

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \sum_{i=1}^{6} \mathrm{sgn}(\tau_i)\cdot a_{1\tau_i(1)}\cdot a_{2\tau_i(2)}\cdot a_{3\tau_i(3)}\\ &= \sum_{i=1}^{6}(-\mathrm{sgn}(\sigma_i))\cdot a_{1\sigma_i(1)}\cdot a_{2\sigma_i(3)}\cdot a_{3\sigma_i(2)}\\ &= -\sum_{i=1}^{6} \mathrm{sgn}(\sigma_i)\cdot a_{1\sigma_i(1)}\cdot a_{3\sigma_i(2)}\cdot a_{2\sigma_i(3)}\\ &= (\text{右辺}).\end{aligned}$$

問題 11-2 次の等式を示せ.

$$(1)\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$(2)\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 0$$

定理 11-4 (3 次行列の場合)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ca_{31} & a_{22}+ca_{32} & a_{23}+ca_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

[証明]

問題 11-2 (1) より

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ca_{31} & a_{22}+ca_{32} & a_{23}+ca_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

後の項は定理 11-2 と問題 11-2 (2) から

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

よって, 定理の式を得る.

□

参考文献

[1] 三宅敏恒, 線形代数学, 培風館.