線形代数 (第 11 回) の解答

問題 11-1 の解答

(1)

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{11-3}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{1 行目} \leftrightarrow \text{2 行目}$$

$$\overset{\text{11-4}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix}\text{3 行目に 1 行目 } \times(-1) \text{ を足した} \\ \text{4 行目に 1 行目 } \times 1 \text{ を足した}\end{matrix}$$

$$\overset{\text{11-1}}{=} -1 \times \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{サラス}}{=} -\big\{(-1)\cdot(-2)\cdot 2 + (-1)\cdot 0\cdot 0 + 1\cdot 2\cdot 2 - (-1)\cdot 0\cdot 2 - (-1)\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot(-2)\cdot 0\big\}$$

$$= -(4+0+4-0+4-0)$$

$$= -12.$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{11-3}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{1 行目} \leftrightarrow \text{4 行目}$$

$$\overset{\text{11-4}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix}\text{2 行目に 1 行目 } \times 2 \text{ を足した} \\ \text{3 行目に 1 行目 } \times(-3) \text{ を足した} \\ \text{4 行目に 1 行目 } \times(-2) \text{ を足した}\end{matrix}$$

$$\overset{\text{11-1}}{=} -1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -5 & -3 \\ -3 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{11-2}}{=} -1\cdot(-1)^2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix}\text{2 行目と 3 行目からそれぞれ} \\ (-1) \text{ をくくり出した}\end{matrix}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{サラス}}{=} -\bigl\{2\cdot5\cdot4+3\cdot3\cdot3+5\cdot1\cdot1\\
&\qquad\qquad -2\cdot3\cdot1-3\cdot1\cdot4-5\cdot5\cdot3\bigr\}\\
&= 21.
\end{aligned}
$$

問題 11-2 の解答

(1) について.

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{\sigma\in S_3}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot\bigl(a_{2\sigma(2)}+b_{2\sigma(2)}\bigr)\cdot a_{3\sigma(3)}\\
&= \sum_{\sigma\in S_3}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot a_{3\sigma(3)}+\sum_{\sigma\in S_3}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot b_{2\sigma(2)}\cdot a_{3\sigma(3)}\\
&= (\text{右辺}).
\end{aligned}
$$

(2) 行列の 2 行目と 3 行目を入れ替えると行列式は -1 倍になるが, 今の行列の場合 2 行目と 3 行目は同じなので行列として変わらない. つまり,

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}
$$

よって

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{vmatrix} = 0.
$$