演習問題１の解答 (環論)

演習問題 1-1 の解答

(1) $p = (a, b),\ q = (c, d),\ r = (e, f) \in A$ に対して,

$$p \cdot (q + r) = p \cdot q + p \cdot r, \quad (p + q) \cdot r = p \cdot r + q \cdot r$$

を確認すればよい. ここでは, $p \cdot (q + r) = p \cdot q + p \cdot r$ のみ示す.

$$\begin{aligned} p \cdot (q + r) &= (a, b) \cdot (c + e, d + f) \\ &= (a(c + e) + b(d + f), a(d + f) + b(c + e)) \\ &= (ac + ae + bd + bf, ad + af + bc + be) \\ &= (ac + bd, ad + bc) + (ae + bf, af + be) \\ &= p \cdot q + p \cdot r. \end{aligned}$$

(2) 次を示せばよい.

$$(1, 0) \cdot p = p \cdot (1, 0) = p \quad (\forall p \in A)$$

$p = (a, b)$ とすると,

$$(1, 0) \cdot p = (1, 0) \cdot (a, b) = (1 \cdot a + 0 \cdot b, 1 \cdot b + 0 \cdot a) = (a, b) = p,$$
$$p \cdot (1, 0) = (a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 + b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b) = p.$$

(2) $p = (1, 1),\ q = (1, -1) \in A$ とすると, $p \neq 0_A,\ q \neq 0_A$ だが,

$$p \cdot q = (1, 1) \cdot (1, -1) = (0, 0) = 0_A.$$

よって, A は整域でない.

(3) $(1, a) \in A^\times$ とすると, $(1, a) \cdot (b, c) = (1, 0)$ を満たす $(b, c) \in A$ がある. $(b + ac, c + ab) = (1, 0)$ より,

$$1 = b + ac = b + (-ab)a = b(1 - a^2).$$

よって $a^2 \neq 1$ で,

$$(b, c) = \left(\frac{1}{1 - a^2}, \frac{-a}{1 - a^2} \right).$$

逆に $a^2 \neq 1$ のとき,

$$(b, c) = \left(\frac{1}{1 - a^2}, \frac{-a}{1 - a^2} \right)$$

と置けば, $(1, a) \cdot (b, c) = (1, 0)$. よって, $(1, a) \in A^\times$ となる a の条件は $a^2 \neq 1$.

演習問題 1-2 の解答
$x, y \in A$ とすると
$$(x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2.$$
A の仮定から
$$x + y = x + xy + yx + y.$$
よって $xy = -yx$. 仮定と定理 1-1 から $-1 = (-1)^2 = 1$. よって $xy = yx$. 従って A は可換環である.

演習問題 1-3 の解答
(1) 定理 3-1 の部分環の条件を確認する. $x = a + b\omega,\ y = c + d\omega\ (a, b, c, d \in \mathbb{Z})$ とする.

(i) $x - y = (a - c) + (b - d)\omega$ より $x - y \in A$.

(ii) $\omega^2 - \omega + 1 = 0$ に注意すると,
$$xy = ac + bd\omega^2 + (ad + bc)\omega = (ac - bd) + (ad + bc + bd)\omega \in A.$$

(iii) $1 = 1 + 0 \cdot \omega \in A$.

以上より, A は $\mathbb{C}$ の部分環である.

(2) $x \in A$ とすると,
$$|x|^2 = x\bar{x} = a^2 + (\omega + \bar{\omega})ab + b^2\omega\bar{\omega} = a^2 + ab + b^2$$
より, $|x|^2$ は 0 以上の整数である. $x \in A^\times$ と仮定する. $xy = 1$ を満たす $y \in A$ を取ると,
$$1 = |xy|^2 = |x|^2|y|^2$$
であり, $|x|^2,\ |y|^2$ は 0 以上の整数なので, $|x|^2 = 1$ が従う. よって $|x| = 1$
　逆に $|x| = 1$ とすると, $x\bar{x} = 1$. また $\bar{x} = (a + b) - b\omega \in A$. よって $x \in A^\times$.

(3) $|x| = 1$ とすると,
$$1 = |x|^2 = a^2 + ab + b^2 = \left(b + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4} \geq \frac{3a^2}{4}.$$
よって $|a| \leq 1$. 同様に $|b| \leq 1$. これらの不等式を満たす (a, b) で, $1 = a^2 + ab + b^2$ を満たすものは $(a, b) = (\pm 1, 0), (0, \pm 1), \pm(1, -1)$. よって
$$A^\times = \{\pm 1,\ \pm\omega, \pm(1 - \omega)\}.$$

演習問題 1-4 の解答

(1) 割り算の原理より

$$f(x) = q(x)(x^2+2) + ax + b \quad (q(x) \in \mathbb{R}[x],\ a, b \in \mathbb{R})$$

と表せる．$x = \sqrt{-2}$ を代入すると，

$$a\sqrt{-2} + b = f(\sqrt{-2}) = -8\sqrt{-2} + 5.$$

よって $a = -8,\ b = 5$ であり，余りは $-8x + 5$.

(2) y の多項式として $y - x^2$ の次数は 1 なので，

$$f(x, y) = q(x, y)(y - x^2) + r(x) \quad (q(x, y) \in \mathbb{C}[x, y],\ r(x) \in \mathbb{C}[x])$$

と表せる．y に x^2 を代入すると

$$r(x) = f(x, x^2) = x^{10} + x^7 + 1.$$

演習問題 1-5 の解答

y の多項式として $f(x, y)$ を $y^2 - x^3$ で割ると，

$$f(x, y) = q(x, y)(y^2 - x^3) + a(x)y + b(x) \quad (q(x, y) \in \mathbb{C}[x, y],\ a(x), b(x) \in \mathbb{C}[x])$$

と表せる．ここで，$a(x), b(x)$ をそれぞれ

$$a(x) = \sum_{i=0}^{d_1} a_i x^i, \quad b(x) = \sum_{j=0}^{d_2} b_j x^j$$

と表す．このとき，

$$0 = f(t^2, t^3) = \sum_{i=0}^{d_1} a_i t^{2i+3} + \sum_{j=0}^{d_2} b_j t^{2j}.$$

$f(t^2, t^3)$ の奇数次の部分は $\sum_{i=0}^{d_1} a_i t^{2i+3}$ であり，偶数次の部分は $\sum_{j=0}^{d_2} b_j t^{2j}$ となる．よって，$a_i = 0\ (0 \leqq i \leqq d_1),\ b_j = 0\ (\ 0 \leqq j \leqq d_2)$. 従って $f(x, y)$ は $y^2 - x^3$ で割り切れる．

演習問題 1-6 の解答

次を示せばよい．

$$a_0 + a_1 \sin x + \cdots a_{n-1}(\sin x)^{n-1} = 0\ (a_i \in \mathbb{R}) \Rightarrow a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0 \quad \text{(eq1)}$$

仮に $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ のいずれかが 0 でないとすると，

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$

は零多項式ではない．よって，$F(x)$ の根は多くとも $n-1$ 個である．一方，$F(\sin x)=0$ であり，$\sin x$ は閉区間 $[-1,1]$ の任意の値を取ることから，$F(x)$ は無限個の根を持つことになり矛盾．よって，(eq1) が成立する．

演習問題 1-7 の解答

(1) について．

(i) $f(x,y),\ g(x,y)\in I$ とする．$f(a,b)=g(a,b)=0$ より $f(a,b)+g(a,b)=0$. よって $f(x,y)-g(x,y)\in I$.

(ii) $f(x,y)\in I, h(x,y)\in A$ とする．$f(a,b)=0$ より $h(a,b)f(a,b)=0$. よって $h(x,y)f(x,y)\in I$.

よって I は A のイデアルである．

(2) $x-a,\ y-b\in I$ より $(x-a,y-b)\subseteq I$. 逆に $f(x,y)\in I$ とする．割り算の原理から

$$f(x,y)=q_1(x,y)(y-b)+r_1(x)\quad (q_1(x,y)\in\mathbb{C}[x,y],\ r_1(x)\in\mathbb{C}[x])$$

と表せる．さらに，

$$r_1(x)=q_2(x)(x-a)+r_2\quad (q_2(x)\in\mathbb{C}[x],\ r_2\in\mathbb{C})$$

と表す．よって

$$f(x,y)=q_1(x,y)(y-b)+q_2(x)(x-a)+r_2.$$

$f(a,b)=0$ より $r_2=0$. 従って

$$f(x,y)=q_1(x,y)(y-b)+q_2(x)(x-a)\in(x-a,y-b).$$

よって $I\subseteq(x-a,y-b)$. 以上より $I=(x-a,y-b)$.

演習問題 1-8 の解答

(1) $x,y\in\sqrt{I}$, $a\in A$ を取る．このとき，$x^m\in I$, $y^n\in I$ を満たす自然数 m,n がある．

(i) まず，$x-y\in\sqrt{I}$ を示す．

$$(x-y)^{m+n}=\sum_{i=0}^{m+n}{}_{m+n}\mathrm{C}_i\ (-1)^{m+n-i}x^iy^{m+n-i}.$$

$0\le i\le m+n$ に対して，$i\ge m$ または $m+n-i\ge n$. よって $x^iy^{m+n-i}\in I$. これより $(x-y)^{n+m}\in I$. よって $x-y\in\sqrt{I}$.

(ii) また $(ax)^m=a^mx^m\in I$ より $ax\in\sqrt{I}$.

以上より $\sqrt{I}$ は A のイデアルである．

(2) $10^2=100\in(20)$ より $10\in\sqrt{(20)}$. よって $(10)\subseteq\sqrt{(20)}$. 逆に $x\in\sqrt{(20)}$ を取る．$x^n\in(20)$ となる自然数 n がある．x^n は 20 の倍数より素数 $2,5$ で割れる．よって x も素数 $2,5$ で割れる．従って x は 10 の倍数であり，$x\in(10)$. よって $\sqrt{(20)}\subseteq(10)$.

演習問題 1-9 の解答

(1) について.

$$\begin{aligned} I \cdot J &= (5, 2+\sqrt{-6}) \cdot (5, 3+\sqrt{-6}\ ) \\ &= (25, 5(3+\sqrt{-6}), 5(2+\sqrt{-6}), 5\sqrt{-6}\ ) \\ &= (5) \cdot (5, 3+\sqrt{-6}, 2+\sqrt{-6}, \sqrt{-6}\ ). \end{aligned}$$

ここで,

$$1 = (3+\sqrt{-6}) - (2+\sqrt{-6}) \in (5, 3+\sqrt{-6}, 2+\sqrt{-6}, \sqrt{-6}\ )$$

より, $(5, 3+\sqrt{-6}, 2+\sqrt{-6}, \sqrt{-6}) = (1)$. 従って $I \cdot J = (5)$.

(2) K をイデアルとすると, $1+\sqrt{-6} \in K$ より $7 = (1-\sqrt{-6})(1+\sqrt{-6}) \in K$. 従って

$$7 = ax + y(1+\sqrt{-6}) \quad (x, y \in \mathbb{Z})$$

と表せる. これより $ax = 7$ が分かる. a は自然数より $a = 1, 7$ となる.

(1) $a = 1$ のとき,

$$K = \{x + y(1+\sqrt{-6}) \mid x, y \in \mathbb{Z}\} = \{x + y\sqrt{-6} \mid x, y \in \mathbb{Z}\} = A.$$

(2) $a = 7$ のとき,

$$\begin{aligned} K &= \{7x + y(1+\sqrt{-6}\ ) \mid x, y \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(1+\sqrt{-6}\ )(y + x(1-\sqrt{-6}\ ) \mid x, y \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(1+\sqrt{-6}\ )(y + x\sqrt{-6}\ ) \mid x, y \in \mathbb{Z}\} \\ &= (1+\sqrt{-6}\ ). \end{aligned}$$

どちらのケースでも K は A のイデアルとなる. よって $a = 1, 7$.