演習問題1 (環論)

演習問題 1-1 集合 $A = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ に次で演算を定義する.

$$\begin{aligned}(a,b)+(c,d) &\overset{\text{def}}{=} (a+c, b+d),\\ (a,b)\cdot(c,d) &\overset{\text{def}}{=} (ac+bd, ad+bc).\end{aligned}$$

このとき, A は可換環で $0_A = (0,0), \quad 1_A = (1,0)$ である.

(1) A が分配法則を満たすことを確認せよ.

(2) $(1,0)$ が A の単位元であることを確認せよ.

(2) A は整域かどうか判定せよ.

(3) $(1,a) \in A^\times$ となる a の条件を求めよ.

演習問題 1-2 環 A が $x^2 = x$ $(\forall x \in A)$ を満たすとき, A は可換環であることを示せ.

演習問題 1-3 $\omega = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ とし,

$$A = \{a + b\omega \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$$

と置く.

(1) A は $\mathbb{C}$ の部分環であることを示せ.

(2) 次の同値を示せ.

$$x \in A^\times \iff |x| = 1.$$

(3) $A^\times$ を求めよ.

演習問題 1-4

(1) $f(x) = x^7 + x^4 + 1,\ g(x) = x^2 + 2 \in \mathbb{R}[x]$ のとき, $f(x)$ を $g(x)$ で割った余りを求めよ.

(2) $f(x,y) = y^5 + x^5 y + 1,\ g(x,y) = y - x^2 \in \mathbb{C}[x,y]$ のとき, y の多項式とみて $f(x,y)$ を $g(x,y)$ で割った余りを求めよ.

演習問題 1-5 $f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ と変数 t を考える. $f(t^2,t^3)=0$ のとき, $f(x,y)$ は y^2-x^3 で割り切れることを示せ.

演習問題 1-6 関数 $1,\ \sin x,\ (\sin x)^2, ...,\ (\sin x)^{n-1}$ は $\mathbb{R}$ 上 1 次独立であることを示せ.

演習問題 1-7 $a,b \in \mathbb{C}$ と可換環 $A=\mathbb{C}[x,y]$ の部分集合 $I=\{f(x,y) \mid f(a,b)=0\}$ を考える.

(1) I は A のイデアルであることを示せ.

(2) $I=(x-a,y-b)$ を示せ.

演習問題 1-8 可換環 A のイデアル I に対して,

$$\sqrt{I}=\{a \in A \mid \text{ある自然数 } n \text{ が存在して } a^n \in I\}$$

と置く.

(1) $\sqrt{I}$ が A のイデアルであることを示せ.

(2) $\mathbb{Z}$ において, $\sqrt{(20)}=(10)$ を示せ.

演習問題 1-9 可換環 $A=\{a+b\sqrt{-6} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ を考える.

(1) イデアル $I=(5,2+\sqrt{-6})$ と $J=(5,3+\sqrt{-6})$ に対して $I \cdot J=(5)$ を示せ.

(2) 集合 $K=\{xa+y(1+\sqrt{-6}) \mid x,y \in \mathbb{Z}\}$ が A のイデアルになる自然数 a を全て求めよ.