線形代数 (第 12 回)

12　行列式の計算 II

前回は行列式の行に関する基本変形について説明しました．今回は行列式の列に関する基本変形について考えます．

定理 12-1

$$\det({}^t A) = \det(A).$$

定理 12-1 の証明は文献 [1] などを参考にしてください． 3 次の場合については資料の最後に載せておきました．

例題 12-1

次の行列式を計算せよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

[解答]

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 4 \end{vmatrix} \overset{12\text{-}1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} \qquad \text{転置}$$

$$\overset{11\text{-}4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} \qquad \text{第 3 行に第 1 行} \times 1 \text{ を足した}$$

$$\overset{11\text{-}1}{=} 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{11\text{-}2}{=} 3 \times 2 \times 4 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{1 行目から 3, 2 行目から 2,} \\ \text{3 行目から 4 をくくり出した} \end{array}$$

$$\overset{\text{サラス}}{=} 24(0 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0)$$

$$= 48.$$

□

転置した後で行の基本変形をすることは, 転置する前の元々の行列で列の基本変形をするのと同じです. つまり, 行列式を計算する場合は,

行の基本変形だけでなく, 列の基本変形も使って良い！

ということです. ただし, 列の基本変形を使えるのは行列式の計算だけです.

連立１次方程式を解くときは, 列の基本変形は使えません！

前回の行の基本変形に関する性質 (定理 11-1～11-4) は, 列の基本変形に対しても成り立ちます (定理 12-2～12-5).

定理 12-2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 12-3

1 つの列を c 倍すると行列式は **c 倍になる**.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ca_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & ca_{2i} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ca_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \boldsymbol{c} \times \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2i} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 12-4

2 つの列を入れ替えると行列式は **−1 倍になる**.

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= -
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

定理 12-5

1 つの列に他の列の何倍かを加えても, 行列式の値は **変わらない**.

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1i} + ca_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{ni} + ca_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

これらの定理を駆使して例題 12-1 を列の基本変形で解いてみます.

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 \\
3 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 3 & 3 & 4 \\
1 & 6 & 1 & 4
\end{vmatrix}
&\overset{12\text{-}5}{=}
\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 4 & 0 \\
-1 & 3 & 2 & 4 \\
1 & 6 & 2 & 4
\end{vmatrix} && \text{第 3 列に第 1 列} \times 1 \text{ を足した} \\
&\overset{12\text{-}2}{=} 1 \cdot
\begin{vmatrix}
0 & 4 & 0 \\
3 & 2 & 4 \\
6 & 2 & 4
\end{vmatrix} \\
&\overset{12\text{-}3}{=} 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot
\begin{vmatrix}
0 & 2 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1
\end{vmatrix} && \begin{array}{l}\text{第 1 列から 3, 第 2 列から 2,} \\ \text{第 3 列から 4 をくくり出した}\end{array} \\
&\overset{\text{サラス}}{=} 24(0 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 2) \\
&= 48.
\end{aligned}
$$

□

問題 12-1 次の行列式を計算せよ.

$$(1)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \qquad (2)\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 & 3 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \\ -6 & 0 & -6 & -9 \end{vmatrix}$$

例題 12-2

次の行列式を計算せよ.

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

[解答]

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} \overset{12\text{-}5}{=} \begin{vmatrix} a+3b & b & b & b \\ a+3b & a & b & b \\ a+3b & b & a & b \\ a+3b & b & b & a \end{vmatrix}$$

1 列目に 2 列目 $\times 1$ と
3 列目 $\times 1$ と 4 列目 $\times 1$ を足した

$$\overset{11\text{-}4}{=} \begin{vmatrix} a+3b & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

2 行目に 1 行目 $\times(-1)$ を足した
3 行目に 1 行目 $\times(-1)$ を足した
4 行目に 1 行目 $\times(-1)$ を足した

$$\overset{11\text{-}1}{=} (a+3b) \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{サラス}}{=} (a+3b)(a-b)^3.$$

□

問題 12-2 次の行列式を計算せよ.

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & b & b \\ b & b & x & c \\ c & c & c & x \end{vmatrix}$$

定理 12-6
同じ型の正方行列 A と B について次が成り立つ.

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

定理 12-6 の 2 次の場合の証明は問題にしておきます. 一般の場合については [1] などを参照してください.

問題 12-3 $A,\ B$ が 2 次正方行列の場合に定理 12-6 を示せ.

例題 12-3
A が正則行列ならば, $\det(A) \neq 0$ であり, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ であることを示せ.

[解答]
A が正則行列ならば, 逆行列 A^{-1} が存在して $A \cdot A^{-1} = E$ ($\leftarrow$ 単位行列) となる. 両辺の行列式を取ると

$$\det(A)\det(A^{-1}) \overset{\text{12-6}}{=} \det(A \cdot A^{-1}) = \det(E) = 1.$$

よって, $\det(A) \neq 0$ で $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

$\square$

問題 12-4 実数成分の正方行列 A と奇数 m を考える. $A^m = E$ ならば, $\det(A) = 1$ を示せ.

最後に, 定理 12-1 の 3 次の場合について証明しておきます.

定理 12-1 の証明 (3 次の場合)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad {}^tA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

と置くと, ${}^tA$ は A の転置なので $b_{ij} = a_{ji}$ であるから

$$\begin{aligned}\det({}^tA) &= \sum_{\sigma\in S_3} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot b_{1\sigma(1)}\cdot b_{2\sigma(2)}\cdot b_{3\sigma(3)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_3} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot a_{\sigma(1)1}\cdot a_{\sigma(2)2}\cdot a_{\sigma(3)3}.\end{aligned}$$

ここで, 掛け算の並べ替えにより

$$a_{\sigma(1)1}\cdot a_{\sigma(2)2}\cdot a_{\sigma(3)3} = a_{1\sigma^{-1}(1)}\cdot a_{2\sigma^{-1}(2)}\cdot a_{3\sigma^{-1}(3)}$$

であり, また $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$ であることに注意すると

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma\in S_3} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})\cdot a_{1\sigma^{-1}(1)}\cdot a_{2\sigma^{-1}(2)}\cdot a_{3\sigma^{-1}(3)}.$$

σ が 3 文字の置換すべてを動くとき, σ^{-1} も 3 文字の置換すべてを動くので σ^{-1} を τ と書き換えると,

$$\begin{aligned}\det({}^tA) &= \sum_{\tau\in S_3} \operatorname{sgn}(\tau)\cdot a_{1\tau(1)}\cdot a_{2\tau(2)}\cdot a_{3\tau(3)} \\ &= \det(A).\end{aligned}$$

参考文献

[1] 三宅敏恒, 線形代数学, 培風館.