線形代数 (第 12 回) の解答

問題 12-1 の解答

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{12\text{-}4}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ 　　1 列目 $\leftrightarrow$ 2 列目

$\overset{12\text{-}5}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ 　　4 列目に 1 列目 $\times 1$ を足した

$\overset{12\text{-}2}{=} -1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

$\overset{サラス}{=} -(2\cdot 1\cdot(-1) + 1\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot 3\cdot 2 - 2\cdot 3\cdot 2 - 1\cdot 3\cdot(-1) - 2\cdot 1\cdot 1)$

$= -2.$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 & 3 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \\ -6 & 0 & -6 & -9 \end{vmatrix} \overset{12\text{-}3}{=} 2 \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & -3 & -9 \end{vmatrix}$ 　　1, 3 列目から 2 をくくり出した

$\overset{12\text{-}5}{=} 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & 0 & -6 \end{vmatrix}$ 　　2 列目に 1 列目 $\times 1$ を足した
3 列目に 1 列目 $\times(-1)$ を足した
4 列目に 1 列目 $\times(-1)$ を足した

$\overset{12\text{-}2}{=} 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & -6 \end{vmatrix}$

$$\overset{サラス}{=} 4\big(1\cdot 3\cdot(-6) + 1\cdot 3\cdot(-3) + 1\cdot 1\cdot 0 - 1\cdot 3\cdot 0 - 1\cdot 1\cdot(-6) - 1\cdot 3\cdot(-3)\big)$$

$= -48.$

問題 12-2 の解答

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & b & b \\ b & b & x & c \\ c & c & c & x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{11-4}}{=} \begin{vmatrix} x+a+b+c & x+a+b+c & x+a+b+c & x+a+b+c \\ a & x & b & b \\ b & b & x & c \\ c & c & c & x \end{vmatrix}$$

1 行目に 2, 3, 4 行目 $\times 1$ を足した

$$\overset{\text{11-2}}{=} (x+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & b & b \\ b & b & x & c \\ c & c & c & x \end{vmatrix}$$

1 行目から $x+a+b+c$ をくくり出した

$$\overset{\text{12-5}}{=} (x+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & x-a & b-a & b-a \\ b & 0 & x-b & c-b \\ c & 0 & 0 & x-c \end{vmatrix}$$

2 列目に 1 列目 $\times(-1)$ を足した
3 列目に 1 列目 $\times(-1)$ を足した
4 行目に 1 列目 $\times(-1)$ を足した

$$\overset{\text{12-2}}{=} (x+a+b+c) \begin{vmatrix} x-a & b-a & b-a \\ 0 & x-b & c-b \\ 0 & 0 & x-c \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{11-1}}{=} (x+a+b+c)(x-a)(x-b)(x-c).$$

問題 12-3 の解答

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

と置くと,

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \\ &\overset{\text{サラス}}{=} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}) \\ &= a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} - a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} - a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\ &= \det(A)\det(B). \end{aligned}$$

問題 12-4 の解答

$A^m = E$ の両辺の行列式を取ると,

$$\det(A)^m \overset{\text{12-6}}{=} \det(A^m) = \det(E) = 1$$

$\det A$ は実数なので $\det(A) = \pm 1$. また m は奇数より $\det(A) = 1$.