教養の微分 (13 回目)

13. 不定積分の定義と例

今回から積分に入ります. まずは, 原始関数の定義と性質について説明します.

定義 13-1 (原始関数)
関数 $f(x)$ に対して, $P'(x) = f(x)$ を満たす関数 $P(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**と呼ぶ.

例えば,

$$\big(x^3 + x\big)' = 3x^2 + 1, \qquad (\sin x)' = \cos x$$

より, $x^3 + x$ は $3x^2 + 1$ の原始関数, $\sin x$ は $\cos x$ の原始関数と分かります.

問題 13-1 次の関数の原始関数を一つ見つけよ.

(1) $x + 1$ (2) e^{-x} (3) $\sin(2x + 1)$

定理 13-1
関数 $f(x)$ に対して, 関数 $F(x), G(x)$ は共に $f(x)$ の原始関数とする. このとき, ある定数 C が取れて

$$G(x) = F(x) + C$$

と表せる.

定理 13-1 から $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ が一つ分かると, 他の原始関数は $F(x) + C$ (C : 定数) と表せます. そこで, 原始関数をまとめて

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

と表し, $f(x)$ の不定積分と言います ($\int$ はインテグラルと呼びます). 不定積分を求めることを**積分する**といい, $f(x)$ を**被積分関数**, C を**積分定数**と言います.

定理 13-2

(1) $\int x^\alpha\ dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C & (\alpha \neq -1 \text{ のとき}), \\ \log|x| + C & (\alpha = -1 \text{ のとき}). \end{cases}$

(2) $\int e^x\ dx = e^x + C.$

(3) $\int \sin x\ dx = -\cos x + C.$

(4) $\int \cos x\ dx = \sin x + C.$

(5) $\int \frac{1}{(\cos x)^2}\ dx = \tan x + C.$

(6) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\ dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (a > 0).$

(7) $\int \frac{1}{a^2+x^2}\ dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (a > 0).$

定理 13-2 は右辺の関数を微分すると，左辺の被積分関数になることから従います．また積分について次が成り立ちます．

定理 13-3

(1) $\int f(x) + g(x)\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx.$

(2) $\int cf(x)\ dx = c\int f(x)\ dx \quad (c : \text{定数}).$

定理 13-2, 13-3 を使って具体的な関数の積分を計算してみます．

例題 13-1

次の積分を求めよ．

$$(1) \int \frac{x^2+x+2}{x}\ dx \qquad (2) \int e^x + e^{-x}\ dx \qquad (3) \int (\cos x)^2\ dx$$

[解答]

(1) 定理 13-3 より

$$\int \frac{x^2+x+2}{x}\ dx = \int x + 1 + \frac{2}{x}\ dx = \int x\ dx + \int 1\ dx + 2\int \frac{1}{x}\ dx.$$

定理 13-2 (1) より

$$\int \frac{x^2+x+2}{x}\ dx = \frac{x^2}{2} + x + 2\log|x| + C.$$

(2) について.

$$\int e^x + e^{-x}\ dx = \int e^x\ dx + \int e^{-x}\ dx = e^x - e^{-x} + C.$$

(3) $\cos(2x) = 2(\cos x)^2 - 1$ より

$$\int (\cos x)^2\ dx = \int \frac{1}{2}\{1+\cos(2x)\}\ dx = \frac{1}{2}\int 1\ dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\ dx.$$

従って

$$\int (\cos x)^2\ dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + C.$$

□

問題 13-2　次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int (x+1)^2\ dx$　(2) $\displaystyle\int \sin x\cos x\ dx$　(3) $\displaystyle\int \frac{1}{1+4x^2}\ dx$,　(4) $\displaystyle\int \frac{1}{(\sin x)^2}\ dx$

次は微分不可能な点を持つ関数の積分について考えてみます.

例題 13-2
次の関数の原始関数を一つ求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} -x & (x \leqq 0 \text{ のとき}), \\ x & (x > 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

＊この関数は $x=0$ で微分不可能である.

[解答]
関数 $P(x)$ を次で定める.

$$P(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & (x \leqq 0 \text{ のとき}), \\ \frac{1}{2}x^2 & (x > 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき, $P(x)$ が $f(x)$ の原始関数であることを示す. $x<0$ および $x>0$ のとき, $P'(x) = f(x)$ である. 次に $x=0$ における $P(x)$ の微分可能性をみる. $P(0)=0$ に注意して,

$$\lim_{x\uparrow 0}\frac{P(x)-P(0)}{x-0} = \lim_{x\uparrow 0}\frac{-x}{2} = 0 = f(0),$$

$$\lim_{x\downarrow 0}\frac{P(x)-P(0)}{x-0} = \lim_{x\downarrow 0}\frac{x}{2} = 0 = f(0).$$

よって
$$\lim_{x\to 0}\frac{P(x)-P(0)}{x-0}=f(0).$$
従って $P(x)$ は $x=0$ で微分可能で $P'(x)=f(0)$. 以上より, $P(x)$ は $f(x)$ の原始関数である.

□

例題 13-2 の $f(x)$ は $x=0$ で微分不可能ですが, 連続にはなります. 実は連続関数は常に原始関数を持つことが知られています. このことは次回以降に説明します. 一方, 不連続関数は原始関数を持たない場合があります (問題 13-3 (2) を参照).

問題 13-3

(1) 次の関数を積分せよ.
$$f(x)=\begin{cases}0 & (x \leqq 0 \text{ のとき}),\\ x & (x>0 \text{ のとき}).\end{cases}$$

(2) 次の関数は原始関数を持たないことを示せ.
$$f(x)=\begin{cases}0 & (x \neq 0 \text{ のとき}),\\ 1 & (x=0 \text{ のとき}).\end{cases}$$