教養の微積 (13 回目) の解答

問題 13-1 の解答

(1) $\frac{1}{2}x^2 + x$,　(2) $-e^{-x}$,　(3) $-\frac{1}{2}\cos(2x+1)$.

問題 13-2 の解答

(1) について.

$$\int (x+1)^2\ dx = \int x^2 + 2x + 1\ dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + C.$$

(2) $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$ より

$$\int \sin x\cos x\ dx = \int \frac{1}{2}\sin(2x)\ dx = -\frac{1}{4}\cos(2x) + C.$$

(3) 定理 13-2 (7) より

$$\int \frac{1}{1+4x^2}\ dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{(\frac{1}{2})^2 + x^2}\ dx = \frac{1}{2}\arctan(2x) + C.$$

(4) について.

$$\left(\frac{1}{\tan x}\right)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{(\sin x)^2}.$$

従って

$$\int \frac{1}{(\sin x)^2}dx = -\frac{1}{\tan x} + C.$$

問題 13-3 の解答

(1) 関数 $P(x)$ を

$$P(x) = \begin{cases} 0 & (x \leqq 0 \text{ のとき}), \\ \frac{x^2}{2} & (x > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める. $P(x)$ が $f(x)$ の原始関数であることを示す. $x < 0$ および $x > 0$ のとき, $P'(x) = f(x)$. 次に $x = 0$ での $P(x)$ の微分可能性をみる.

$$\lim_{x\uparrow 0} \frac{P(x) - P(0)}{x - 0} = 0 = f(0),$$

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{P(x) - P(0)}{x - 0} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{x}{2} = 0 = f(0).$$

よって

$$\lim_{x\to 0} \frac{P(x) - P(0)}{x - 0} = f(0).$$

従って $P(x)$ は $x=0$ で微分可能で $P'(0)=f(0)$. 以上より, $P(x)$ は $f(x)$ の原始関数である.

(2) 背理法で示す. $f(x)$ が原始関数 $P(x)$ を持つと仮定する. 区間 $(-\infty, 0)$ および $(0, \infty)$ において,

$$P'(x) = f(x) = 0.$$

よって, $P(x)$ はそれらの区間で定数関数である. 従って

$$P(x) = \begin{cases} C_1 & (x < 0 \text{ のとき}), \\ C_2 & (x = 0 \text{ のとき}), \\ C_3 & (x > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と表せる. 一方, $P(x)$ は微分可能な関数なので $x=0$ で連続である. よって $C_1 = C_2 = C_3$ となり,

$$P(x) = C_1 \ (-\infty < x < \infty)$$

と表せる. このとき, $f(x) = P'(x) = 0$ となるが, これは $f(x)$ の定め方に矛盾. 従って $f(x)$ は原始関数を持たない.