線形代数 (第 13 回) の解答

問題 13-1 の解答

$a_{11} = 2,\ a_{12} = 7,\ a_{13} = 4,\ a_{14} = 1$ で, また

$$a_{11}^* = (-1)^{1+1}\det(A_{11}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{サラス}}{=} 6,$$

$$a_{21}^* = (-1)^{2+1}\det(A_{12}) = -\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{サラス}}{=} 13,$$

$$a_{31}^* = (-1)^{3+1}\det(A_{13}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{サラス}}{=} -31,$$

$$a_{41}^* = (-1)^{4+1}\det(A_{14}) = -\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{サラス}}{=} -22.$$

よって

$$\det(A) = a_{11}a_{11}^* + a_{12}a_{21}^* + a_{13}a_{31}^* + a_{14}a_{41}^* = -43.$$

問題 13-2 の解答

$a_{11} = a,\ a_{12} = 0,\ a_{13} = 0,\ a_{14} = b$ で, また

$$a_{11}^* = (-1)^{1+1}\det(A_{11}) = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{vmatrix} = a^3,$$

$$a_{41}^* = (-1)^{4+1}\det(A_{14}) = -\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & b & a \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = -b^3.$$

第 1 行に関して余因子展開すると,

$$\det(A) = a_{11}a_{11}^* + a_{14}a_{41}^* = a^4 - b^4.$$

問題 13-3 の解答

A について. $\det(A) = 1 \neq 0$ であるので, 定理 13-3 より A は正則行列である.

$$a^*_{11} = (-1)^{1+1}\det(A_{11}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2, \qquad a^*_{12} = (-1)^{1+2}\det(A_{21}) = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$a^*_{13} = (-1)^{1+3}\det(A_{31}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad a^*_{21} = (-1)^{2+1}\det(A_{12}) = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$a^*_{22} = (-1)^{2+2}\det(A_{22}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \qquad a^*_{23} = (-1)^{2+3}\det(A_{32}) = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$a^*_{31} = (-1)^{3+1}\det(A_{13}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \qquad a^*_{32} = (-1)^{3+2}\det(A_{23}) = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$a^*_{33} = (-1)^{3+3}\det(A_{33}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

よって, 定理 13-3 より

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

B について.

$$\det(B) \overset{\text{サラス}}{=} 3\cdot(-2)\cdot(-1) + 4\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 5 - 3\cdot 1\cdot 5 - 4\cdot 1\cdot(-1) - 1\cdot(-2)\cdot 0 = 0.$$

定理 13-3 より B は正則ではない.

問題 13-4 の解答

$$\begin{aligned} \det(A) &\overset{\text{サラス}}{=} a^3 + 1 + 1 - a - a - a \\ &= a^3 - 3a + 2 \\ &= (a-1)^2(a+2). \end{aligned}$$

定理 13-3 より

$$A \text{ が正則ではない} \iff \det(A) = 0 \iff a = 1, -2.$$