演習問題2 (環論)

演習問題 2-1 $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ の元を $\overline{x} = x + 11\mathbb{Z}$ $(x \in \mathbb{Z})$ で表す.

(1) $\overline{2}^{\,n}$ $(n = 1, 2, ..., 10)$ を計算せよ.

(2) $\overline{1} \cdot \overline{2} \cdots \overline{10}$ を計算せよ.

演習問題 2-2 $A = \mathbb{C}[x]$ とそのイデアル $I = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ を考える. 剰余環 $R = A/I$ の元を $\overline{g(x)} = g(x) + I$ $(g(x) \in A)$ で表す.

(1) $\overline{x^5} = \overline{1}$ を示せ.

(2) $\overline{x^3} \cdot (\overline{(x^8 + x^2)} - \overline{(x^2 + 1)})$ を計算せよ.

(3) $x^{20} + x^9 + 1$ を $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ で割った余りを求めよ.

(4) $x^2 + x + 1$ の R における逆元を求めよ.

演習問題 2-3 $A = \mathbb{C}[x, y]$ において考える.

(1) $I = (x, y)$ は極大イデアルであることを示せ.

(2) $J = (y - x^2)$ は素イデアルだが, 極大イデアルでないことを示せ.

演習問題 2-4

(1) $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ は環として同型でないことを示せ.

(2) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は環として同型でないことを示せ.

演習問題 2-5 相異なる $a, b \in \mathbb{C}$ に対して, 写像 φ を次で定義する.

$$\varphi : \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C} \times \mathbb{C} \ (f(t) \mapsto (f(a), f(b)))$$

またイデアル $I = ((t - a)(t - b))$ を考える.

(1) φ が環準同型であることを示せ.

(2) $\mathbb{C}[t]/I \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ を示せ.

演習問題 2-6 $\mathbb{C}$ の部分環 $A = \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ とそのイデアル $I = (2 + \sqrt{7})$ を考える.

(1) $I \cap \mathbb{Z} = 3\mathbb{Z}$ を示せ.

(2) $1 + I = \sqrt{7} + I$ を示せ.

(3) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \simeq A/I$ を示せ.

(4) I は極大イデアルであることを示せ.