教養の微分 (14 回目)

14 リーマン和と定積分

今回はリーマン和を用いた定積分の定義について紹介しましす．内容の詳細や定理の証明は文献 [1] を参照にしてください．

定義 14-1 (リーマン和)

閉区間 $[a, b]$ 上の関数 $f(x)$ を考える．閉区間 $[a, b]$ 上に点

$$x_k = a + \frac{(b-a)k}{n} \quad (k = 0, 1, ..., n)$$

を取り，$[a, b]$ を n 分割する．

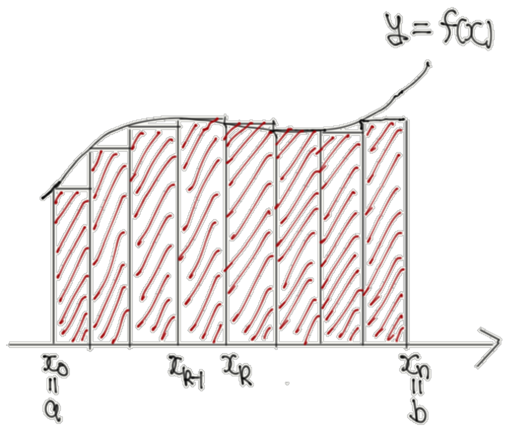
$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n]$$

この分割を Δ_n で表す．また各区間 $[x_{k-1}, x_k]$ から点 α_k を取り，次の和を考える．

$$R(f, \Delta_n, \{\alpha_k\}) = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\frac{b-a}{n}$$

これを関数 $f(x)$ の分割 Δ_n と点列 $\{\alpha_k\}$ に対する**リーマン和**という．

※ $f(x) \geqq 0$ の場合を考えます．$\alpha_k = x_{k-1}$ として選ぶと，リーマン和 $R(f, \Delta_n, \{\alpha_k\})$ は下記の長方形の面積の和になります．



copyright © 大学数学の授業ノート

例題 14-1

関数 $f(x)=x\ (0 \leqq x \leqq 1)$ を考える．このとき, 2 分割

$$[0,1]=\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},1\right]$$

と点列 $\alpha_1=\frac{1}{2},\ \alpha_2=1$ に対して, リーマン和 $R(f,\Delta_2,\{\alpha_k\})$ を計算せよ．

[解答]

$$R(f,\Delta_2,\{\alpha_k\})=\sum_{k=1}^{2}f(\alpha_k)\frac{1-0}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

□

例題 14-2

関数 $f(x)=\sin x\ (0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2})$ を考える．このとき, 3 分割

$$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]=\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$$

と点列 $\alpha_1=0,\ \alpha_2=\frac{\pi}{6},\ \alpha_3=\frac{2\pi}{6}$ に対して, リーマン和 $R(f,\Delta_3,\{\alpha_k\})$ を計算せよ．

[解答]

$$\begin{aligned}R(f,\Delta_3,\{\alpha_k\}) &= \sum_{k=1}^{3}f(\alpha_k)\times\frac{\frac{\pi}{2}-0}{3}\\ &= \sin(0)\times\frac{\pi}{6}+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\times\frac{\pi}{6}++\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)\times\frac{\pi}{6}\\ &= \frac{\pi}{12}\left(1+\sqrt{3}\right).\end{aligned}$$

□

問題 14-1 $f(x)=2x+1\ \ (0 \leqq x \leqq 2)$ とおく．閉区間 $[0,2]$ の 4 分割 Δ_4 と点列

$$\alpha_1=0,\ \alpha_2=\frac{2}{3},\ \alpha_3=\frac{3}{2},\ \alpha_4=2$$

に対して, $R(f,\Delta_4,\{\alpha_i\})$ を求めよ．

定義 14-2 (定積分)
閉区間 $[a,b]$ 上の関数 $f(x)$ を考える．$n \to \infty$ のとき, $R(f,\Delta_n,\{\alpha_k\})$ が $\{\alpha_k\}$ の取り方に依らず一定の値に収束するとき, $f(x)$ は $[a,b]$ 上で**積分可能**と言い, その値を $\int_a^b f(x)\, dx$ で表す.

与えられた関数が積分可能かどうかの判定は一般的には難しい問題です．しかし, $f(x)$ が連続のときは, 常に積分可能であることが知られています.

定理 14-1
閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 $f(x)$ は $[a,b]$ 上で積分可能である.

定理 14-1 から閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して積分値 $\int_a^b f(x)\ dx$ が定まります．また, 形式的に $\int_a^a f(x)\, dx = 0$ とし, さらに $\int_b^a f(x)\, dx$ を $-\int_a^b f(x)\, dx$ で定めることにします.

例題 14-3
関数 $f(x) = x\ (0 \leqq x \leqq 1)$ を考える．このとき, $\int_0^1 f(x)\, dx$ を計算せよ.

[解答]
$[0,1]$ の n 分割を考える.

$$\Big[0,1\Big] = \Big[0,\frac{1}{n}\Big] \bigcup \Big[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\Big] \bigcup \cdots \bigcup \Big[\frac{n-1}{n},1\Big].$$

また点列

$$\alpha_1 = \frac{1}{n},\ \alpha_2 = \frac{2}{n},\ \cdots, \alpha_k = \frac{k}{n}, \cdots, \alpha_n = 1$$

をとる．このとき,

$$R(f,\Delta_n,\{\alpha_k\}) = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k) \times \frac{1-0}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

従って

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} R(f,\Delta_n,\{\alpha_k\}) = \frac{1}{2}.$$

□

問題 14-2 $f(x) = x^2\ \ (0 \leqq x \leqq 1)$ を考える.

(1) $\alpha_k = \frac{k}{n}\ (k = 1,2,...,n)$ のとき, $R(f,\Delta_n,\{\alpha_k\})$ を求めよ.

(2) 定積分の定義に基づいて $\int_0^1 f(x)\, dx$ を求めよ.

定積分の性質を見ておきます.

定理 14-2

$f(x), g(x)$ を連続関数とし, k を実数とする.

(1) $\int_a^b k\ dx = k(b-a)$.

(2) $\int_a^b f(x) + g(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$.

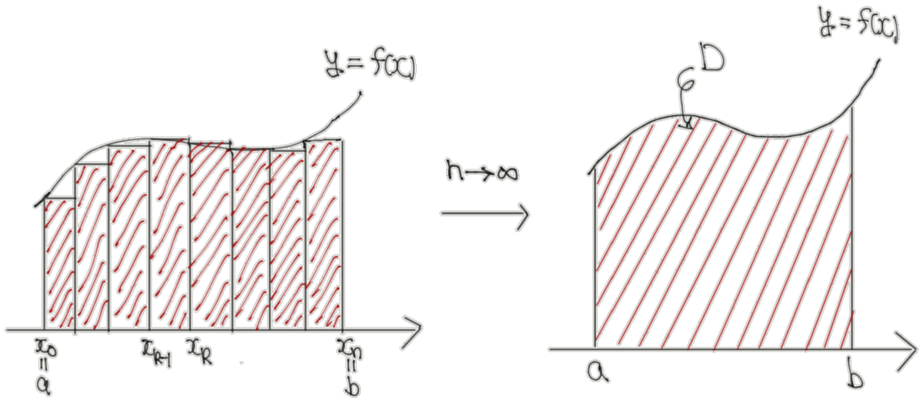
(3) $\int_a^b kf(x)\ dx = k\int_a^b f(x)\ dx$.

(4) $a < c < b$ のとき,

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$$

問題 14-3 定積分の定義に基づいて定理 14-2 (2) を証明せよ.

積分の幾何学的な意味について考えます. 閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 $f(x)$ で $f(x) \geqq 0$ を満たすものとします. このとき, リーマン和 $R(f, \Delta_n, \{\alpha_k\})$ は $n \to \infty$ のとき, 下記の斜線部分 D の面積に近づくことが知られています.



従って, 次が成り立ちます.

定理 14-3

閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 $f(x)$ を考える. $f(x) \geqq 0$ のとき, $S = \int_a^b f(x)\ dx$ は上記の斜線部分 D の面積と一致する.

問題 14-4 $f(x) = x^2 + x \ \ (0 \leqq x \leqq 1)$ と x 軸と $x = 1$ で囲まれる図形の面積 S を定積分の定義に基づいて計算せよ.

参考文献

[1] 微分積分入門 1 変数 (山形大学 数理科学科編), 裳華房.