教養の微分 (15 回目)

15. 微分積分学の基本定理

前回はリーマン和を用いて定積分を定義しました. 特に閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数 $f(x)$ について, 定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ が定まることをみました. 今回は定積分を用いて, 連続関数に原始関数が存在することを証明します. 次を示すことが目標です.

定理 15-1 (微分積分学の基本定理)
連続関数 $f(x)$ と実数 a に対して, 関数 $F(x)$ を

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

で定めると, $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数となる.

定理 15-1 の証明には次が必要になります.

定理 15-2 (積分の平均値定理)
連続関数 $f(x)$ と実数 a, b $(a \neq b)$ に対して,

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)$$

を満たす実数 c が a, b の間に取れる.

[証明]
簡単のため, $a < b$ で, $f(x)$ は定数関数でない場合を考える. $f(x)$ の最大値を M, 最小値を m とする. $f(x)$ は定数関数でないので, $m < M$ となる. また

$$f(\alpha) = M, \quad f(\beta) = m$$

を満たす α, β を閉区間 $[a, b]$ から取る. $m \leqq f(x) \leqq M$ $(a \leqq x \leqq b)$ に注意すると,

$$f(\alpha)(b-a) = m(b-a) = \int_a^b m\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b M\,dx = M(b-a) = f(\beta)(b-a).$$

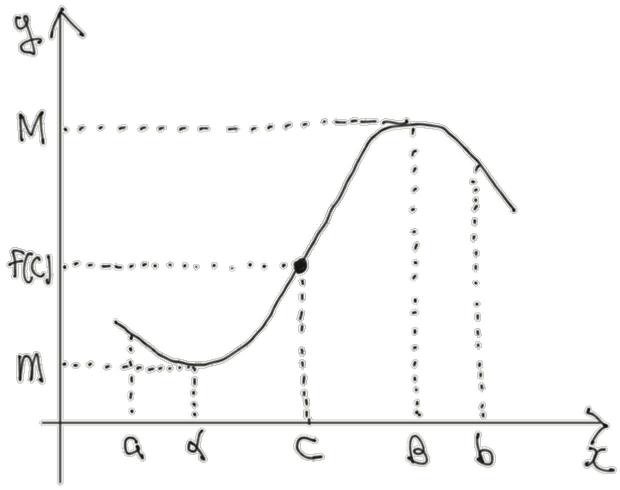
よって

$$f(\alpha) < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx < f(\beta).$$

中間値の定理より,

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

を満たす c が α, β の間に取れる. c は a, b の間の点にもなっているので, (1) より定理 15-2 が導かれる.



□

微分積分学の基本定理を証明します.

定理 15-1 の証明

次を証明すればよい.

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

まず, 分子を次のように変形する.

$$F(x+h) - F(x) \quad = \quad \int_a^{x+h} f(t)\ dt - \int_a^x f(t)\ dt = \int_x^{x+h} f(t)\ dt.$$

右辺の式に定理 15-2 を適用すると,

$$\int_x^{x+h} f(t)\ dt = ((x+h) - x) f(c_{x,h}) = h f(c_{x,h})$$

を満たす $c_{x,h}$ が x と $x+h$ の間に取れる. $h \to 0$ のとき, $x+h$ は x に近づくので,

$$\lim_{h \to 0} c_{x,h} = x.$$

以上より

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(c_{x,h}) = f(x).$$

□

定理 15-3

連続関数 $f(x)$ とその原始関数 $P(x)$ を考える. 実数 a, b に対して,

$$\int_a^b f(x)\,dx = P(b) - P(a).$$

※ 右辺の $P(b) - P(a)$ を $[P(x)]_a^b$ で表す.

[証明]

$\int_a^x f(t)\,dt$ と $P(x)$ は共に $f(x)$ の原始関数であるので, 定理 13-1 から

$$\int_a^x f(t)\,dt = P(x) + C \quad (C: \text{ 定数})$$

と表せる. 上の式で $x = a$ のときを考えると,

$$C = \int_a^a f(t)\,dt - P(a) = -P(a).$$

よって

$$\int_a^b f(t)\,dt = P(b) + C = P(b) - P(a).$$

□

定理 15-3 を用いて $\int_1^2 x^2\,dx$ を計算してみます. $P(x) = \frac{1}{3}x^3$ は x^2 の原始関数の一つなので, 定理 15-3 より

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

と計算できます.

問題 15-1 次を計算せよ.

$$(1)\ \int_1^2 x^2 + x\,dx \qquad (2)\ \int_1^0 e^x\,dx$$

例題 15-1

(1) $\int_0^1 x^5\,dx$ を求めよ.

(2) 次の極限値を計算せよ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^5 + 2^5 + \cdots + n^5}{n^6}.$$

[解答]

(1) $f(x) = x^5$ と置くと, $\frac{x^6}{6}$ は $f(x)$ の原始関数より

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}.$$

(2) 閉区間 $[0, 1]$ の n 分割 Δ_n と点列 $\alpha_i = \frac{i}{n}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ に対して,

$$R(f, \Delta_n, \{\alpha_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) \times \frac{1}{n} = \frac{1^5 + 2^5 + \cdots + n^5}{n^6}.$$

定積分の定義から

$$\lim_{n\to\infty} R(f, \Delta_n, \{\alpha_i\}) = \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{6}.$$

よって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^5 + 2^5 + \cdots + n^5}{n^6} = \frac{1}{6}.$$

□

問題 15-2

(1) $\int_0^\pi \sin x\,dx$ を求めよ.

(2) 次の極限値を計算せよ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

問題 15-3 微分積分学の基本定理を用いて, 次の関数の原始関数を一つ求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \geqq 0 \text{ のとき}), \\ -x & (x < 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$