教養の微積 (14回目) の解答

問題 14-1 の解答

$$\begin{aligned} R(f, \Delta_4, \{\alpha_k\}) &= \sum_{k=1}^{4} f(\alpha_k) \times \frac{2-0}{4} \\ &= f(\alpha_1) \times \frac{1}{2} + f(\alpha_2) \times \frac{1}{2} + f(\alpha_3) \times \frac{1}{2} + f(\alpha_4) \times \frac{1}{2} \\ &= 1 \times \frac{1}{2} + \frac{7}{3} \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{37}{6}. \end{aligned}$$

問題 14-2 の解答

(1) リーマン和の定義から

$$\begin{aligned} R(f, \Delta_n, \{\alpha_k\}) &= \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_k) \cdot \frac{1}{n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}. \end{aligned}$$

(2) (1) より,

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \to \infty} R(f, \Delta_n, \{\alpha_k\}) = \lim_{n \to \infty} \frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6} = \frac{1}{3}.$$

問題 14-3 の解答

閉区間 $[a, b]$ 上に点

$$x_k = a + \frac{(b-a)k}{n} \quad (k = 0, 1, ..., n)$$

を取り, $[a, b]$ の n 分割 Δ_n を考える.

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n]$$

また各区間 $[x_{k-1}, x_k]$ から点 α_k を取る．このとき，

$$\begin{aligned} R(f+g, \Delta_n, \{\alpha_k\}) &= \sum_{k=1}^{n} \Big(f(\alpha_k) + g(\alpha_k) \Big) \frac{b-a}{n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k) \frac{b-a}{n} + \sum_{k=1}^{n} g(\alpha_k) \frac{b-a}{n} \\ &= R(f, \Delta_n, \{\alpha_k\}) + R(g, \Delta_n, \{\alpha_k\}). \end{aligned}$$

$f(x), g(x)$ は連続関数より，$f(x)+g(x)$ も連続関数．よって，$f(x), g(x), f(x)+g(x)$ はそれぞれ積分可能で，

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) + g(x)\ dx &= \lim_{n\to\infty} R(f+g, \Delta_n, \{\alpha_k\}) \\ &= \lim_{n\to\infty} R(g, \Delta_n, \{\alpha_k\}) + \lim_{n\to\infty} R(g, \Delta_n, \{\alpha_k\}) \\ &= \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx. \end{aligned}$$

問題 14-4 の解答

定理 14-3 より $S = \int_0^1 x^2 + x\ dx$ である．$[0,1]$ の n 分割

$$\Delta_n : \Big[0,1\Big] = \Big[0, \frac{1}{n}\Big] \bigcup \Big[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\Big] \bigcup \cdots \bigcup \Big[\frac{n-1}{n}, 1\Big]$$

を考える．また各区間 $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ から次のように点を取る．

$$\alpha_1 = \frac{1}{n},\ \alpha_2 = \frac{2}{n},\ \cdots, \alpha_k = \frac{k}{n}, \cdots, \alpha_n = 1.$$

このとき，

$$\begin{aligned} R(f, \Delta_n, \{\alpha_k\}) &= \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k) \cdot \frac{1}{n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left(\frac{k}{n}\right)^2 + \frac{k}{n} \right\} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2} + \frac{n(n+1)}{2n} \right\}. \end{aligned}$$

従って

$$S = \int_0^1 x^2 + x\ dx = \lim_{n\to\infty} R(f, \Delta_n, \{\alpha_k\}) = \frac{5}{6}.$$