教養の微積 (15 回目) の解答

問題 15-1 の解答

(1) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}$ は x^2+x の原始関数より

$$\int_1^2 x^2+x\;dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\left(\frac{8}{3}+2\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{23}{6}.$$

(2) e^x は e^x の原始関数より

$$\int_1^0 e^x\;dx=-\int_0^1 e^x\;dx=-\Big[e^x\Big]_0^1=-(e-1)=1-e.$$

問題 15-2 の解答

(1) $-\cos x$ は $f(x)=\sin x$ の原始関数だから

$$\int_0^\pi \sin x\;dx=\big[-\cos x\big]_0^\pi=2.$$

(2) $[0,\pi]$ の n 分割 Δ_n と点列 $\alpha_k=\frac{k\pi}{n}$ $(k=1,2,...,n)$ に対して,

$$R(f,\Delta_n,\{\alpha_k\})=\sum_{k=1}^n f(\alpha_k)\times\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

一方, 定積分の定義から

$$\lim_{n\to\infty}R(f,\Delta_n,\{\alpha_k\})=\int_0^\pi\sin x\;dx=2.$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}R(f,\Delta_n,\{\alpha_k\})=\frac{2}{\pi}.$$

問題 15-3 の解答

関数 $P(x)$ を

$$P(x)=\int_0^x f(t)\;dt$$

で定める. 定理 15-1 より $P(x)$ は $f(x)$ の原始関数である. $x\geqq 0$ のとき, $0\leqq t\leqq x$ で $f(t)=t$ より

$$P(x)=\int_0^x t\;dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x=\frac{x^2}{2}.$$

$x < 0$ のとき, $x \leqq t \leqq 0$ で $f(t) = -t$ より

$$P(x) = \int_0^x -t\, dt = -\int_x^0 -t\, dt = \int_x^0 t\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_x^0 = -\frac{x^2}{2}.$$

従って, 求める原始関数は

$$P(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & (x \geqq 0 \text{ のとき}), \\ -\frac{x^2}{2} & (x < 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$