教養の微積 (16 回目)

置換積分

前回は, 微分積分学の基本定理を証明し, 原始関数から定積分が計算できることをみました. 今回からは具体的な積分の計算方法について紹介していきます.

定理 16-1(置換積分)
微分可能な関数 $\varphi(t)$ に対して, $x = \varphi(t)$ とする.

(1) $\int f(x)\ dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt$.

(2) $t : \alpha \to \beta$ のとき, $x : a \to b$ とする. このとき,

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt.$$

※ 形式的に $dx = \frac{dx}{dt}dt$ と覚えておくと, (1) は x を $\varphi(t)$, dx を $\frac{dx}{dt}dt$ に置き換えた式と見ることができる.

[証明]
(1) $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすると,

$$(F(\varphi(t)))' = \varphi'(t)F'(\varphi(t)) = \varphi'(t)f(\varphi(t)).$$

従って

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = F(\varphi(t)) + C = F(x) + C = \int f(x)\ dx.$$

(2) $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ の原始関数は $F(\varphi(t))$ より

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\ dx.$$

□

置換積分を用いて $\int (2t+1)^3\ dt$ を計算してみます. $f(x) = x^3$, $x = \varphi(t) = 2t + 1$ と置くと,

$$f(\varphi(t)) = (2t+1)^3, \quad \varphi'(t) = 2.$$

従って

$$\int (2t+1)^3\ dt = \frac{1}{2}\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \frac{1}{2}\int f(x)\ dx = \frac{x^4}{8} + C.$$

よって

$$\int (2t+1)^3\ dt = \frac{(2t+1)^4}{8} + C.$$

上の計算は次のように形式的に行うこともできます．$2t+1=x$ とすると，

$$dt = \frac{dt}{dx}dx = \frac{1}{2}dx.$$

よって

$$\int (2t+1)^3\ dt = \int \frac{x^3}{2}\ dx = \frac{x^4}{8} + C = \frac{(2t+1)^4}{8} + C.$$

定積分 $\int_0^1 (2t+1)^3\ dt$ についても考えてみます．$t: 0 \to 1$ のとき，$x: 1 \to 3$ なので，

$$\int_0^1 (2t+1)^3\ dt = \int_1^3 \frac{x^3}{2}\ dx = \left[\frac{x^4}{8}\right]_1^3 = 10.$$

例題 16-1

次の積分を計算せよ．

(1) $\int \sin x\ (\cos x)^2\ dx$　　(2) $\int \frac{\log x}{x}\ dx$　　(3) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx$

[解答]

(1) $y = \cos x$ と置くと，$\frac{dy}{dx} = -\sin x$ である．$dy = -\sin x\ dx$ より，

$$\int \sin x\ (\cos x)^2\ dx = -\int y^2\ dy = -\frac{y^3}{3} + C = -\frac{1}{3}(\cos x)^3 + C.$$

(2) $y = \log x$ と置くと，$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ である．$dy = \frac{dx}{x}$ より，

$$\int \frac{\log x}{x}\ dx = \int y\ dy = \frac{y^2}{2} + C = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C.$$

(3) $x = \sin y$ と置くと，$\frac{dx}{dy} = \cos y$ である．よって $dx = \cos y\ dy$．また $x: 0 \to 1$ のとき，$y: 0 \to \frac{\pi}{2}$ である．$\cos y \geqq 0$ より

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-(\sin y)^2} = \sqrt{(\cos y)^2} = \cos y.$$

よって

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos y)^2\ dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2y)+1}{2}\ dy = \left[\frac{\sin(2y)}{4} + \frac{y}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

□

(コメント) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \ \ (a > 0)$ は $y = a \sin x$ で置き換えると計算できます.

問題 16-1　次の積分を求めよ.

$$(1)\ \int (3x+1)^5\, dx, \qquad (2) \int xe^{-x^2}\, dx, \qquad (3\ ) \int \frac{1}{e^x + 1}\, dx.$$

$$(4)\ \int_0^1 x\sqrt{x+1}\, dx \qquad (5) \int_0^1 \sqrt{2 - x^2}\, dx$$

定理 16-2

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \log |f(x)| + C.$$

[証明]
$y = f(x)$ と置くと, $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ である. $dy = f'(x)\, dx$ より

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \int \frac{1}{y}\, dy = \log |y| + C = \log |f(x)| + C.$$

$\square$

定理 16-2 の使い方を確認しておきます. 例えば,

$$\int \frac{1}{\tan x}\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\, dx = \log |\sin x| + C$$

と計算できます.

問題 16-2　次の積分を求めよ.

$$(1) \int \frac{2x}{x^2 + 3}\, dx, \qquad (2) \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx, \qquad (3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx.$$

問題 16-3

(1) $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ と置くとき, 次を示せ.

$$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad d\theta = \frac{2}{1+t^2}dt$$

(2) 次の積分を計算せよ.

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos\theta}\, d\theta \qquad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin\theta}\, d\theta$$