教養の微分 (17回目)

17. 部分積分

定理 17-1(部分積分)
微分可能な関数 $f(x), g(x)$ に対して次が成り立つ.

$$(1) \quad \int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

$$(2) \quad \int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

[証明]
(1) 積の微分の公式から

$$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

両辺に積分をとると,

$$\int (f(x)g(x))'\,dx = \int f(x)g'(x)\,dx + \int f'(x)g(x)\,dx.$$

ここで, $(f(x)g(x))'$ の原始関数は $f(x)g(x)$ なので,

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

(2) (1) と同様にして,

$$\int_a^b (f(x)g(x))'\,dx = \int_a^b f(x)g'(x)\,dx + \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

ここで,

$$\int_a^b (f(x)g(x))'\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b$$

なので

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

□

例題 17-1
次の積分を計算せよ.

$$(1)\ \int xe^x\,dx \qquad (2)\ \int x\sin(2x)\,dx \qquad (3)\ \int \log x\,dx$$

[解答]
(1)

$$\int xe^x\,dx = \int x(e^x)'\,dx = xe^x - \int (x)'e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

(2)

$$\begin{aligned}\int x\sin(2x)\,dx &= \frac{1}{2}\int x\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)'\,dx \\ &= -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\int (x)'\cos(2x)\,dx \\ &= -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx \\ &= -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + C.\end{aligned}$$

(3)

$$\int \log x\,dx = \int (x)'\log x\,dx = x\log x - \int 1\,dx = x\log x - x + C.$$

□

(コメント) $(\sin x, \cos x, a^x) \times$ (多項式) の積分は, 定理 17-1 において $f(x) =$ 多項式, $g'(x) = \sin x, \cos x, a^x$ とみる. $(\log x) \times$ (多項式) の積分は, $f(x) = \log x$, $g'(x) =$ 多項式 とみる.

問題 17-1 次の積分を計算せよ.

$$(1)\ \int x\log x\,dx \qquad (2)\ \int x^2e^x\,dx \qquad (3)\ \int \arctan x\,dx$$

例題 17-2
次の積分を計算せよ.

$$(1)\ \int_0^1 \log(x+1)\,dx \qquad (1)\ \int_0^\pi (x+1)\sin x\,dx \qquad (2)\ \int_0^1 x^2e^{2x}\,dx$$

[解答]

(1)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log(x+1)\,dx &= \int_0^1 (x+1)'\log(x+1)\,dx\\ &= \Big[(x+1)\log(x+1)\Big]_0^1 - \int_0^1 1\,dx\\ &= 2\log 2 - \Big[x\Big]_0^1\\ &= 2\log 2 - 1.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (x+1)\sin x\,dx &= \int_0^\pi (x+1)(-\cos x)'\,dx\\ &= \Big[-(x+1)\cos x\Big]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx\\ &= (\pi+2) + \Big[\sin x\Big]_0^\pi\\ &= \pi + 2.\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 e^{2x}\,dx &= \int_0^1 x^2\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'\,dx\\ &= \Big[\frac{x^2e^{2x}}{2}\Big]_0^1 - \int_0^1 xe^{2x}\,dx\\ &= \frac{e^2}{2} - \int_0^1 x\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'\,dx\\ &= \frac{e^2}{2} - \Big[\frac{xe^{2x}}{2}\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2}\,dx\\ &= \Big[\frac{e^{2x}}{4}\Big]_0^1\\ &= \frac{e^2-1}{4}.\end{aligned}$$

□

問題 17-2 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_1^e (2x+1)\log x\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^\pi x^2\sin x\,dx$ (3) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,dx$

部分積分の応用として, 漸化式を用いるタイプの定積分について考えます.

例題 17-3
整数 $n \geqq 0$ に対して
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \, dx$$
と置く.

(1) $n \geqq 2$ のとき, $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ を示せ.

(2) I_4 を計算せよ.

[解答]
(1)
$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-1} (-\cos x)' \, dx \\
&= \Big[-(\sin x)^{n-1} \cos x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2} (\cos x)^2 \, dx \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2} \left(1 - (\sin x)^2\right) \, dx \\
&= (n-1)(I_{n-2} - I_n).
\end{aligned}$$
よって $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

(2) (1) より
$$I_4 = \frac{3}{4} \cdot I_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0 = \frac{3}{8} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = \frac{3\pi}{16}$$
□

問題 17-3　整数 $n \geqq 0$ に対して
$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^n} \, dx$$
と置く.

(1) $n \geqq 1$ のとき, 次を示せ.
$$I_{n+1} = \frac{1}{n2^{n+1}} + \frac{(2n-1)}{2n} I_n$$

(2) I_3 を計算せよ.

定理 17-2

実数 $a \neq 0$ に対して次が成り立つ.

$$(1) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \log(x+\sqrt{x^2+a}) + C.$$

$$(2) \quad \int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+a} + a\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\,\right|\right\} + C.$$

※ (2) は放物線の長さを計算する際に用います (問題 17-5).

[証明]

(1) $y = x + \sqrt{x^2+a}$ と置くと,

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{x+\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}}.$$

より $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$. 従って

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \int \frac{dy}{y} = \log|y| + C = \log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C.$$

(2)

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \int (x)'\sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\,dx.$$

上式の 2 項目の積分を次のように変形する.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\,dx &= \int \frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+a}}\,dx - \int \frac{a}{\sqrt{x^2+a}}\,dx \\
&= \int \sqrt{x^2+a}\,dx - a\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|.
\end{aligned}$$

従って

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+a} + a\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right\} + C.$$

□

(コメント) 定理 17-2 (1) の積分は双曲線関数で置換積分することでも計算できます (問題 17-4).

問題 17-4　関数 $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$,　$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ を考える.

(1) $(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$ を示せ.

(2) $(\sinh)'(x) = \cosh(x)$ を示せ.

(3) $\sinh(x)$ の逆関数を求めよ.

(4) $x = \sinh(y)$ で置換積分することで, 次の積分を計算せよ.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx.$$

問題 17-5　C^1 級関数 $f(x)$ に対して, 曲線 $C : y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ の長さ L は次で与えられる.

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

これを踏まえて, 放物線 $C : y = x^2$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の長さ $L(C)$ を求めよ.