教養の微積 (18 回目)

18 広義積分

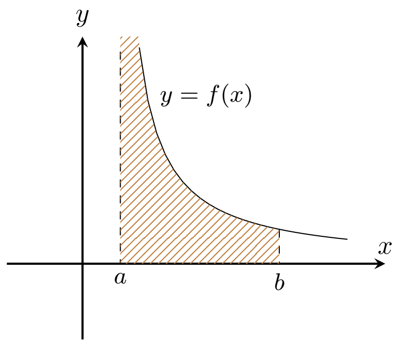
今回は関数が発散する場合の積分や, 無限区間上の積分について考えます.

定義 18-1(有界区間上の広義積分)

区間 $(a,b]$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して, 関数 $S(t)=\int_t^b f(x)\ dx\ (a<t\leqq b)$ を考える. $\lim_{t\downarrow a} S(t)$ が収束するとき, その極限値を

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{t\downarrow a} S(t)$$

で表し, **広義積分** $\int_a^b f(x)\ dx$ **は収束する**と言う. $S(t)$ が収束しないとき, $\int_a^b f(x)\ dx$ **は発散する**と言う.



[注意]

(i) $\lim_{t\downarrow a}$ ($\lim_{t\uparrow a}$) は $t>a$ ($t<a$) の条件下で t を a に近づけると言う意味.

(ii) $[a,b)$ 上の連続関数 $f(x)$ の場合は極限値

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{t\uparrow b}\int_a^t f(x)\ dx$$

を考えることで広義積分を定義する.

例題 18-1
次の積分を計算せよ.

$$(1)\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \qquad (2)\ \int_0^1 \log x\,dx \qquad (3)\ \int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$$

[解答]
(1) 被積分関数は $x=0$ で発散することに注意する. そこで, 関数

$$S(t)=\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \quad (0<t<1)$$

を考える. このとき, $S(t)=2-2\sqrt{t}$ なので,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\lim_{t\downarrow 0} S(t)=2.$$

(2) 被積分関数は $x=0$ で発散することに注意する. $0<t<1$ に対して,

$$S(t)=\int_t^1 \log x\,dx=\Big[x\log x-x\Big]_t^1=-t\log t+t-1.$$

ロピタルの定理より,

$$\lim_{t\downarrow 0} t\log t=\lim_{t\downarrow 0}\frac{\log t}{\frac{1}{t}}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{(\log t)'}{\left(\frac{1}{t}\right)'}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{\frac{1}{t}}{\frac{-1}{t^2}}=\lim_{t\downarrow 0}(-t)=0.$$

従って

$$\int_0^1 \log x\,dx=\lim_{t\downarrow 0} S(t)=-1.$$

(3) 被積分関数は $x=0$ で発散するので, 次のように分けて考える (下記のコメントを参考のこと).

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx=\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx+\int_{-1}^0 \frac{1}{x}\,dx.$$

ここで,

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx=\lim_{t\downarrow 0}\int_t^1 \frac{1}{x}\,dx=\lim_{t\downarrow 0}\Big[\log|x|\Big]_t^1=\lim_{t\downarrow 0}(-\log|t|)=\infty$$

より, $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ は発散する. 従って $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$ も発散する.

$\square$

[コメント] 積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ について, $f(x)$ が (a,b) 上の点 c で発散する場合は

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

と二つに分けて考えます. $\int_a^c f(x)\,dx$, $\int_c^b f(x)\,dx$ の両方が収束するときに限り,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

で積分値を定義します. どちらか一方でも発散するとき, $\int_a^b f(x)\,dx$ は発散すると言います. 例題 18-1 (3) において,

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log|x|\Big]_{-1}^1 = \log 1 - \log|-1| = 0$$

とするのは誤りです.

問題 18-1 次の積分を求めよ.

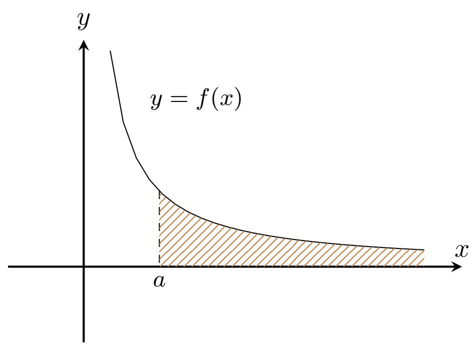
(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x(x+2)}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_0^1 (\log x)^2\,dx$

定義 18-2 (無限区間上の広義積分)

区間 $[a,\infty)$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して, 関数 $S(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ $(a < t < \infty)$ を考える. $\displaystyle\lim_{t\to\infty} S(t)$ が収束するとき, その極限値を

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} S(t)$$

で表し, **広義積分** $\int_a^\infty f(x)\,dx$ **は収束する**と言う. $\displaystyle\lim_{t\to\infty} S(t)$ が収束しないとき, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ **は発散する**と言う.



$(-\infty, b]$ 上の連続関数 $f(x)$ の場合は, 極限値

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx$$

を考えることで広義積分を定義する.

例題 18-2

次の積分を計算せよ.

$$(1)\ \int_0^\infty e^{-x}\,dx \qquad (2)\ \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \qquad (3)\ \int_2^\infty \frac{x}{x^2-1}\,dx$$

[解答]

(1) 関数

$$S(t)=\int_0^t e^{-x}\,dx \quad (t>0)$$

を考える. このとき, $S(t)=1-e^{-t}$ なので,

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx=\lim_{t\to\infty}S(t)=1.$$

(2) 積分を $(-\infty,0]$ と $[0,\infty)$ の二つの区間に分けて考える.

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx=\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,dx=\lim_{t\to\infty}\arctan t=\frac{\pi}{2}.$$

同様に,

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx=\lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx=\lim_{t\to-\infty}\{-\arctan t\}=\frac{\pi}{2}.$$

以上より $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx=\pi$.

(3) $t>2$ に対して,

$$\int_2^t \frac{x}{x^2-1}\,dx=\int_2^t \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2-1)'}{x^2-1}\,dx=\left[\frac{\log(x^2-1)}{2}\right]_2^t=\frac{\log(t^2-1)}{2}-\frac{\log 3}{2}.$$

ここで,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\log(t^2-1)}{2}=\infty$$

より $\int_2^\infty \frac{x}{x^2-1}\,dx$ は発散する. □

問題 18-2 次の積分を計算せよ.

$$(1)\ \int_1^\infty e^{-2x}\,dx \qquad (2)\ \int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}\,dx \qquad (3)\ \int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$

問題 18-3 $\alpha>0$ に対して次の積分を計算せよ.

$$(1)\ \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx \qquad (2)\ \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$