教養の微積 (19回目)

19 広義積分の収束判定

広義積分 $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ を計算すると,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & (0 < \alpha < 1 \text{ のとき}), \\ \\ \text{発散} & (\alpha \geqq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となり, α の値によって収束・発散が変化します (問題 18-3 を参照). このように広義積分はいつでも収束するわけではなく, 発散する場合もあります. 今回は, 広義積分が収束する条件についてみます. また応用として, ガンマ関数の収束性について調べます.

定理 19-1

区間 $(a,b]$ (または $[a,b)$) 上の連続関数 $f(x)$ に対して, 極限値

$$\lim_{x\downarrow a}(x-a)^\lambda f(x) \quad \left(\text{または} \lim_{x\uparrow b}(b-x)^\lambda f(x)\right)$$

が存在するような $0<\lambda<1$ が取れるとき, 広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は収束する.

[証明]

文献 [1] 定理 10-2 を参照のこと.

□

例題 19-1

$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ は収束することを示せ.

⋆ 関数 $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ は $x=0$ で発散する. そこで, 定理 19-1 を用いて収束性を調べる.

[証明]

$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ とし, $\lambda = \frac{1}{2}$ と置く. このとき,

$$\lim_{x\downarrow 0} x^\lambda f(x) = \lim_{x\downarrow 0}\cos x = 1.$$

従って, 定理 19-1 から $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ は収束する.

$\square$

[コメント] 上の証明では $\lambda = \frac{1}{2}$ として考えましたが, $\displaystyle\lim_{x\downarrow 0} x^{\lambda} f(x)$ が収束すれば良いので, $\frac{1}{2} \leqq \lambda < 1$ の範囲ならばどんな λ をとっても証明できます.

問題 19-1 次の積分が収束することを示せ.

$$(1)\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,dx \qquad (2)\ \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}\,dx$$

問題 19-2 $\int_0^1 \frac{e^x}{x}\,dx$ は発散することを示せ.

定理 19-2

区間 $[a,\infty)$ (または $(-\infty,a]$) 上の連続関数 $f(x)$ に対して, 極限値

$$\lim_{x\to\infty} x^{\lambda} f(x) \quad \left(\text{または} \lim_{x\to-\infty} x^{\lambda} f(x)\right)$$

が存在するような $\lambda > 1$ が取れるとき, 広義積分 $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ $\left(\text{または} \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx\right)$ は収束する.

[証明]

文献 [1] 定理 10-2 を参照のこと.

$\square$

例題 19-2

広義積分 $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ は収束することを示せ.

[証明]

$f(x) = e^{-x^2}$ とし, $\lambda = 2$ と置く. ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to\infty} x^{\lambda} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0.$$

従って, 定理 19-2 から $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ は収束する.

$\square$

問題 19-3 次の積分が収束することを示せ.

$$(1)\ \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^3-1}\,dx \qquad (2)\ \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{e^x}\,dx$$

定理 19-3

$s > 0$ に対して, 次の広義積分は収束する.

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\, dx.$$

上の積分で定義される関数 $\Gamma(s)$ を**ガンマ関数**という.

※ 自然数 n での値を考えると,

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

となる (問題 19-4). このことから, $\Gamma(s)$ は階乗を正の実数に拡張した関数と思える.

[証明]

まず, 積分区間を次のように二つに分ける.

$$\Gamma(s) = \underbrace{\int_0^1 x^{s-1} e^{-x}\, dx}_{A} + \underbrace{\int_1^\infty x^{s-1} e^{-x}\, dx}_{B}.$$

はじめに A の積分の収束性をみる. $f(x) = x^{s-1}e^{-x}$ と置く. $s \geqq 1$ のとき, $f(x)$ は $x = 0$ で値を持つので A の積分は収束する. $0 < s < 1$ のとき, $\lambda = 1 - s$ と置くと, $0 < \lambda < 1$ であり,

$$\lim_{x \downarrow 0} x^\lambda f(x) = \lim_{x \downarrow 0} e^{-x} = 1.$$

定理 19-1 より A の積分は収束する.

次に B の積分を考える. $\lambda = 2$ とし, $s + 1$ より大きい自然数 M を一つ取る. このとき,

$$0 \leqq x^\lambda f(x) = x^{s+1} e^{-x} \leqq x^M e^{-x}.$$

ここで, $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x^M e^{-x}$ について考える. ロピタルの定理を繰り返し使うと,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^M}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{Mx^{M-1}}{e^x} = \cdots = \lim_{x \to \infty} \frac{M!}{e^x} = 0.$$

よって $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x^\lambda f(x) = 0$. 定理 19-2 から B の積分も収束性する.

□

問題 19-4

(1) $\Gamma(1)$ を求めよ.

(2) $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$ $(s > 0)$ を示せ.

(3) 自然数 n に対して, $\Gamma(n) = (n-1)!$ を示せ.

問題 19-5 ガンマ関数を利用して, $\int_0^1 (\log x)^n\, dx$ (n : 自然数) を計算せよ.

参考文献

[1] 微分積分入門 1 変数 (山形大学 数理科学科編), 裳華房.