教養の微積 (18 回目) の解答

問題 18-1 の解答

(1) 被積分関数は $x=1$ で発散することに注意する．$0<t<1$ に対して,

$$S(t)=\int_0^t \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\,dx=\left[-\frac{3}{2}(1-x)^{\frac{2}{3}}\right]_0^t=-\frac{3}{2}(1-t)^{\frac{2}{3}}+\frac{3}{2}.$$

従って

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\,dx=\lim_{t\uparrow 1}S(t)=\frac{3}{2}.$$

(2) 被積分関数は $x=0$ で発散することに注意する．$0<t<1$ に対して,

$$\begin{aligned}S(t)&=\int_t^1 \frac{1}{x(x+2)}\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_t^1 \frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\,dx\\&=\frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{x}{x+2}\right)\right]_t^1\\&=\frac{1}{2}\left(-\log 3-\log\left(\frac{t}{t+2}\right)\right).\end{aligned}$$

ここで,

$$\lim_{t\downarrow 0}\log\left(\frac{t}{t+2}\right)=-\infty.$$

従って $\int_0^1 \frac{1}{x(x+2)}\,dx$ は発散する．

(3) 被積分関数は $x=0$ で発散することに注意する．

$$\int(\log x)^2\,dx=\int(x)'(\log x)^2\,dx=x(\log x)^2-2\int\log x\,dx=x(\log x)^2-2x\log x+2x+C$$

より, $0<t<1$ に対して,

$$\int_t^1(\log x)^2\,dx=2-t(\log t)^2+2t\log t-2t$$

となる．例題 18-1 (2) の議論と同様にして,

$$\lim_{t\downarrow 0}t(\log t)^2=0,\qquad \lim_{t\downarrow 0}t(\log t)=0.$$

従って,

$$\int_0^1 (\log x)^2\,dx = \lim_{t\downarrow 0}\int_t^1 (\log x)^2\,dx = 2.$$

□

問題 18-2 の解答

(1) $t>0$ に対して,

$$S(t) = \int_1^t e^{-2x}\,dx = \Big[-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big]_1^t = -\frac{e^{-2t}}{2} + \frac{e^{-2}}{2}$$

従って

$$\int_1^\infty e^{-2x}\,dx = \lim_{t\to\infty} S(t) = \frac{e^{-2}}{2}.$$

(2) 積分を二つに分けて考える.

$$\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}\,dx = \int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx + \int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}\,dx.$$

$\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$ より

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t xe^{-x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^t = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

また

$$\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 xe^{-x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_t^0 = \lim_{t\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-t^2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

従って

$$\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}\,dx = \int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx + \int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}\,dx = 0.$$

(3) 不定積分を計算すると,

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int \frac{(1+e^x)'}{1+e^x}\,dx = \log(1+e^x) + C.$$

従って

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\Big[\log(1+e^x)\Big]_0^t = \lim_{t\to\infty}\big(\log(1+e^t)-\log 2\big) = \infty.$$

よって $\int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ は発散する.

□

問題 18-3 の解答

(1) 被積分関数は $x=0$ で発散することに注意する．$0<t<1$ に対して,

$$S(t)=\int_t^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx=\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right) & (\alpha\neq 1\text{ のとき}),\\ -\log t & (\alpha=1\text{ のとき})\ .\end{cases}$$

$\lim_{t\downarrow 0}\log t=-\infty$ であり，また

$$\lim_{t\downarrow 0}t^{1-\alpha}=\begin{cases}0 & (0<\alpha<1\text{ のとき}),\\ \infty & (\alpha>1\text{ のとき})\ .\end{cases}$$

従って

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx=\lim_{t\downarrow 0}S(t)=\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha} & (0<\alpha<1\text{ のとき}),\\ \text{発散} & (\alpha\geqq 1\text{ のとき})\ .\end{cases}$$

(2) $t>0$ に対して,

$$S(t)=\int_1^t \frac{1}{x^\alpha}\,dx=\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}\left(t^{1-\alpha}-1\right) & (\alpha\neq 1\text{ のとき}),\\ \log t & (\alpha=1\text{ のとき})\ .\end{cases}$$

$\log t\to\infty\ (t\to\infty)$ であり，また

$$\lim_{t\to\infty}t^{1-\alpha}=\begin{cases}0 & (\alpha>1\text{ のとき}),\\ \infty & (0<\alpha<1\text{ のとき})\ .\end{cases}$$

従って

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx=\lim_{t\to\infty}S(t)=\begin{cases}\frac{1}{\alpha-1} & (\alpha>1\text{ のとき}),\\ \text{発散} & (0<\alpha\leq 1\text{ のとき}).\end{cases}$$