教養の微積 (19 回目) の解答

問題 19-1 の解答

(1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ $(0 < x < 1)$ とし, $\lambda = \frac{1}{2}$ と置くと,

$$\lim_{x \downarrow 0} x^{\lambda} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} \sqrt{\frac{x}{\sin x}} = 1.$$

定理 19-1 より $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\, dx$ は収束する.

(2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$ は $x = 1, 3$ で発散するので, 積分を二つに分けて収束性を調べる.

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}\, dx = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}\, dx + \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}\, dx.$$

$\lambda = \frac{1}{2}$ とすると,

$$\lim_{x \downarrow 1} (x-1)^{\lambda} f(x) = \lim_{x \downarrow 1} \frac{1}{\sqrt{3-x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

より, $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}\, dx$ は収束する. 同様に,

$$\lim_{x \uparrow 3} (3-x)^{\lambda} f(x) = \lim_{x \uparrow 3} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

より, $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}\, dx$ も収束する. 以上より, $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}\, dx$ も収束する.

問題 19-2 の解答

$e^x \geqq 1$ $(0 < x \leqq 1)$ より

$$\frac{e^x}{x} \geqq \frac{1}{x} \qquad (0 < x \leqq 1).$$

ここで,

$$\int_t^1 \frac{e^x}{x}\, dx \geqq \int_t^1 \frac{1}{x}\, dx = -\log t.$$

$t \downarrow 0$ のとき, $-\log t \to \infty$ だから, $\int_0^1 \frac{e^x}{x}\, dx$ は発散する.

問題 19-3 の解答

(1) $f(x) = \frac{1}{x^3-1}$ $(-\infty < x < 0)$ とし, $\lambda = 2$ と置く. このとき,

$$\lim_{x \to -\infty} x^{\lambda} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^3-1} = 0.$$

定理 19-2 より $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^3-1}\, dx$ は収束する.

(2) $f(x) = (\sin x)e^{-x}$ とし, $\lambda = 2$ とすると,

$$\lim_{x\to\infty} x^{\lambda} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \sin x}{e^x}.$$

$|\sin x| \leqq 1$ より

$$\left| \frac{x^2 \sin x}{e^x} \right| \leqq \frac{x^2}{e^x} \quad (x > 0). \quad \text{(eq1)}$$

ロピタルの定理より,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

これと (eq1) より $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\lambda} f(x) = 0$. 定理 19-2 より $\int_0^{\infty} (\sin x)e^{-x}\, dx$ は収束する.

問題 19-4 の解答

(1)

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \left\{ -e^{-t} + 1 \right\} = 1.$$

(2) 定義より

$$\Gamma(s+1) \ = \lim_{t\to\infty} \int_0^t x^s e^{-x}\, dx.$$

部分積分を考えると,

$$\begin{aligned} \int_0^t x^s e^{-x}\, dx &= \int_0^t x^s (-e^{-x})'\, dx \\ &= \Big[-x^s e^{-x} \Big]_0^t + s \int_0^t x^{s-1} e^{-x}\, dx \\ &= -t^s e^{-t} + s \int_0^t x^{s-1} e^{-x}\, dx. \end{aligned}$$

定理 19-3 の証明と同様にして $\lim\limits_{t\to\infty} t^s e^{-t} = 0$. 従って

$$\Gamma(s+1) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t x^s e^{-x}\, dx = \lim_{t\to\infty} s \int_0^t x^{s-1} e^{-x}\, dx = s\Gamma(s).$$

(3) (2) を繰り返し用いると,

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = (n-1)! \times \Gamma(1).$$

$\Gamma(1) = 1$ より $\Gamma(n) = (n-1)!$.

問題 19-5 の解答

$t > 0$ に対して, 積分 $\int_t^1 (\log x)^n \, dx$ を考える. $y = -\log x$ と置くと, $x = e^{-y}$, $dx = -e^{-y}dy$ となる. よって

$$\int_t^1 (\log x)^n \, dx = \int_{-\log t}^{0} (-y)^n (-e^{-y}) dy = (-1)^n \int_0^{-\log t} y^n e^{-y} dy.$$

$\lim_{t \downarrow 0} (-\log t) = \infty$ より,

$$\int_0^1 (\log x)^n \, dx = \lim_{t \downarrow 0} \int_0^1 (\log x)^n \, dx = (-1)^n \int_0^{\infty} y^n e^{-y} dy = (-1)^n \Gamma(n+1).$$

問題 19-4 より $\int_0^1 (\log x)^n \, dx = (-1)^n \cdot n!$