線形代数 (第 14 回)

14　集合とベクトル方程式

今回は「ベクトル空間」を勉強する上で基本となる「集合」や「ベクトル方程式」について復習します.

14-1 集合

ここでは, 集合の基本的な用語を復習します. 詳細は, 高校の教科書や, 授業ノートの集合論の資料を見てください.

定義 14-1 (集合)
範囲がはっきりしたものの集まりを**集合**と呼び, 集合を構成する 1 つ 1 つのものを**要素** (または **元**) と呼ぶ. a が集合 A の要素であるとき, a は A に**含まれる** (または **属する**) と言い, $a \in A$ と表す. a が A の要素でないときは $a \notin A$ で表す.

例 14-1　実数全体の集合を $\mathbb{R}$ とし, n 項ベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^n$ と表す. このとき,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin \mathbb{R}^3$$

□

集合の表し方には主として

① $\{\quad\}$ の中にその要素を書き並べる方法

② 要素を x などの文字で表し, $\{\quad|\quad\}$ の中の縦線の右に x が満たす条件を書く方法

の 2 つがあります. 例えば,

$$A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

と

$$A = \{x \mid x \text{ は } 18 \text{ の正の約数 }\}$$

は表し方が異なるだけで同じ集合です.

例 14-2 集合 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 5\}$ は $-2 < x < 5$ を満たす実数 x の集合だから, $-1 \in B$, $1.5 \in B$, $\pi \in B$, $5 \notin B$.

$\square$

例題 14-1

次のうち集合 $A = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x - y - 1 = 0 \right\}$ の要素となるものを全て答えよ.

(1) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(解答)

条件を満たしているか確認すれば良い. 答えは (2), (3).

$\square$

定義 14-2

集合 A, B において, A のどの要素も B の要素になるとき, つまり,

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

が成立するとき, A は B の**部分集合**と言い, $A \subseteq B$ で表す. このとき, A **は** B **に含まれる** または B **は** A **を含む**と言う.

例 14-3 集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $C = \{2, 4, 6\}$ を考える. A の要素はすべて B に含まれるので $A \subseteq B$ となる. 一方で, A と C の間にはこのような包含関係はない.

$\square$

問題 14-1 $\mathbb{Z}$ は整数全体の集合とする．集合

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x < 5\}, \quad C = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

について, A を②の方法で, B, C を①の方法で表せ.

問題 14-2 集合 A とベクトル $\mathfrak{a}$ を

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -x + 2y + 3z = 0 \right\}, \qquad \mathfrak{a} = \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

で定める．$\mathfrak{a} \in A$ となる実数 t を求めよ.

14-2 平面における直線のベクトル方程式

集合 C を

$$C = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + 2y = 1 \right\}$$

のように定義すると，これは $x + 2y = 1$ を満たす平面ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 全体の集合です．つまり, **集合 C は平面の中のある図形を表しています**.

$$\begin{aligned} C &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + 2y = 1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = -2y + 1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} -2y + 1 \\ y \end{bmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

つまり, 集合 C は点 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ を通り, ベクトル $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ が作る直線となります．上式の

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

をこの直線の**ベクトル方程式**と言います.

例題 14-2
次の集合が表す図形を答えよ.

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 3x + y = -2 \right\}$$

(解答)

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 3x + y = -2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = -3x - 2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -3x - 2 \end{bmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

よって, 集合 A は点 $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ を通り, ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ が作る直線である. ベクトル方程式で表すと,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

□

問題 14-3 次の集合が表す図形を答えよ.

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x + 3y = 1 \right\}$$

14-3 空間における直線・平面のベクトル方程式

次は 3 次元空間でのベクトル方程式について考えます. 集合 D を

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x + y - 3z = 1 \right\}$$

で定義したとき, D は空間内でどのような図形になるでしょうか?

$$\begin{aligned}
D &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x + y - 3z = 1 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y = -2x + 3z + 1 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -2x + 3z + 1 \\ z \end{bmatrix} \;\middle|\; x, z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; x, z \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

つまり, 集合 D は点 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ を通り, ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ が作る平面になります. ベクトル方程式で表すと,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

例題 14-3

次の集合が表す図形を答えよ.

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y - z = 0 \right\}$$

(解答)

$$
\begin{aligned}
B &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y - z = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = -2y + z \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} -2y + z \\ y \\ z \end{bmatrix} \;\middle|\; y, z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; y, z \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}
$$

よって, 集合 B は原点を通りベクトル $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ が作る平面である. ベクトル方程式で表すと,

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})
$$

□

次の例題は, 条件が連立方程式になっている場合です. 行列の基本変形を用いて考えます.

例題 14-4

次の集合が表す図形を答えよ.

$$
S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \end{array} \right\}
$$

(解答)

条件の連立方程式の拡大係数行列を基本変形する.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right] \qquad \text{2 行目に 1 行目} \times(-2) \text{ を足した}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \qquad \text{2 行目} \times(-\tfrac{1}{5})$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \qquad \text{1 行目に 2 行目} \times(-2) \text{ を足した}$$

であるので

$$\begin{aligned} S &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x + z = 1 \\ y - z = 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} -z+1 \\ z \\ z \end{bmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

よって, S は点 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ を通り, ベクトル $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ が作る直線である. ベクトル方程式で表すと

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

□

問題 14-4

(1) 次の集合が表す図形を答えよ.

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{array} \right\}$$

(2) a を実数とし, 集合

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; ax + 3y - z = 0 \right\}$$

を考える. $A \subseteq B$ となる a を求めよ.