線形代数 (第 14 回) の解答

問題 14-1 の解答

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leqq x \leqq 3\}, \qquad B = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad C = \{-2, -1, 0\}$$

問題 14-2 の解答

$\mathfrak{a} \in A$ となるためには,

$$(-1) \cdot t + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 0$$

を満たせばよい. 従って $t = 8$.

問題 14-3 の解答

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x + 3y = 1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = \frac{1 - 3y}{2} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1-3y}{2} \\ y \end{bmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

よって, 集合 A は点 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ を通り, ベクトル $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ が作る直線である. ベクトル方程式で表すと,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

問題 14-4 の解答

条件の連立方程式の拡大係数行列を基本変形する．

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right] \qquad \text{2 行目に 1 行目} \times(-1) \text{ を足した}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \qquad \text{2 行目} \times(-1)$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \qquad \text{1 行目に 2 行目} \times(-1) \text{ を足した}$$

であるので

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x + 2z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ z \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

よって, A は原点を通り, ベクトル $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ が作る直線である．ベクトル方程式で表すと

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

(2) $A \subseteq B$ であるためには, A に含まれる全ての点

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

が $ax + 3y - z = 0$ を満たす必要がある．つまり,

$$a \cdot (-2t) + 3 \cdot 3t - 1 \cdot t = 0$$

が成り立てばよい. 上式を変形して,

$$(-2a+8)t=0.$$

これが全ての実数 t で成り立つためには, $a=4$ でなければならない.