線形代数 (第 15 回)

15　ベクトル空間の例

ベクトル空間とは, 「和」と「スカラー倍」の二つの演算が入った集合で, いくつかの条件を満たすものを言います. 例えば, n 項ベクトルの集合, 多項式の集合, 関数の集合など様々な数学的対象がベクトル空間になります. 今回は, (抽象) ベクトル空間の例として, 数ベクトル空間と多項式ベクトル空間について取り上げます.

15-1　数ベクトル空間

まずは, 数ベクトル空間とその部分空間について説明します. n 項ベクトル全体 $\mathbb{R}^n$ はベクトルの集合なので, 自然に和とスカラーが定まります.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \quad (\text{和}) \qquad k \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{bmatrix} \quad (\text{スカラー倍})$$

定義 15-1(数ベクトル空間)
$\mathbb{R}^n$ に上の演算 (和, スカラー倍) を入れたものを **数ベクトル空間** と呼ぶ.

次に $\mathbb{R}^n$ の部分空間について定義します. 次の形のベクトル $\mathbb{O} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ を**零ベクトル**と呼びます.

定義 15-2 (数ベクトル空間の部分空間)

数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 W が次の条件を全て満たすとき, $\mathbb{R}^n$ の **部分空間** と言う.

(i) 零ベクトル $\mathbb{O}$ は W の要素である. つまり, $\mathbb{O} \in W$.

(ii) $\vec{\boldsymbol{u}}$ と $\vec{\boldsymbol{v}}$ が W の要素ならば, $\vec{\boldsymbol{u}}+\vec{\boldsymbol{v}}$ も W の要素になる. つまり,

$$\vec{\boldsymbol{u}},\ \vec{\boldsymbol{v}} \in W \Longrightarrow \vec{\boldsymbol{u}}+\vec{\boldsymbol{v}} \in W$$

(iii) $\vec{\boldsymbol{u}}$ が W の要素で c が実数ならば, $c\vec{\boldsymbol{u}}$ も W の要素になる. つまり,

$$\vec{\boldsymbol{u}} \in W,\ c \in \mathbb{R} \Longrightarrow c\vec{\boldsymbol{u}} \in W$$

次の例題では, $\mathbb{R}^n$ の部分集合が部分空間かどうかチェックします.

例題 15-1

次の W_1, W_2 は $\mathbb{R}^2$ の部分空間か?

$$(1)\ W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 3x+y=0 \right\} \qquad (2)\ W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 3x+y=-2 \right\}$$

(解答)

(1) W_1 は定義 15-2 の (i), (ii), (iii) を満たすので, $\mathbb{R}^2$ の部分空間である.

(i) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in W_1$.

(ii) $\vec{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \in W_1$, $\vec{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in W_1$ とする. W_1 の定義より

$$3a_1 + a_2 = 0 \quad \text{かつ} \quad 3b_1 + b_2 = 0$$

が成り立っているので

$$3(a_1+b_1)+(a_2+b_2) = (3a_1+a_2)+(3b_1+b_2) = 0+0 = 0$$

よって, $\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{bmatrix} \in W_1$.

(iii) $\vec{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \in W_1,\ c \in \mathbb{R}$ とする. W_1 の定義より

$$3a_1 + a_2 = 0$$

が成り立っているので

$$3ca_1 + ca_2 = c(3a_1 + a_2) = c \cdot 0 = 0$$

よって, $c\vec{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} ca_1 \\ ca_2 \end{bmatrix} \in W_1$.

(2) W_2 は $\mathbb{R}^2$ の部分空間ではない. なぜならば, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin W_2$ より, 定義 15-2 (i) を満たさない.

$\square$

(注意) 例題 15-1 の W_1, W_2 のどちらも xy 平面における直線を表しています. 前回の方法で計算すると, W_1 は原点を通りベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ が作る直線, W_2 は点 $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ を通りベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ が作る直線と分かります. しかし, W_1 は部分空間ですが, W_2 は原点を通らないので部分空間ではありません. <u>原点を通らない直線や平面は「部分空間」ではありません.</u>

問題 15-1 次の集合が $\mathbb{R}^3$ の部分空間かどうか判定せよ.

(1) $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y + 3z = 0 \right\}$ (2) $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; {x_1}^2 + {x_2}^2 - {x_3}^2 = 0 \right\}$

部分空間に関して次が成り立ちます. 証明は参考文献 [1] 例題 4.1.1 を確認して下さい.

定理 15-1

$m \times n$ 行列 A に対して, 次の集合 W は $\mathbb{R}^n$ の部分空間となる.

$$W = \{\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n \ \mid\ A\vec{\boldsymbol{x}} = \mathbb{O}\}$$

定理 15-1 を用いて例題 15-1 の W_1 が $\mathbb{R}^2$ の部分空間であることを確認してみます．$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$ と置くと，

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

と書けます．よって，定理 15-1 により，W_1 は $\mathbb{R}^2$ の部分空間であることが分かります．

例題 15-2

次の集合 W が $\mathbb{R}^4$ の部分空間であることを示せ．

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x - 2y + 2z + 2w = 0 \\ 2x - y + 4z + w = 0 \end{array} \right\}$$

(解答)

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ と置くと，

$$W = \left\{ \vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; A\vec{\boldsymbol{x}} = \mathbb{O} \right\}$$

従って，定理 15-1 により，W は $\mathbb{R}^4$ の部分空間である．

$\square$

問題 15-2 次の集合 W が $\mathbb{R}^3$ の部分空間になることを定理 15-1 を用いて示せ．

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 - x_2 = x_3 = 0 \right\}$$

15-2　多項式ベクトル空間

x を変数とする実数係数の n 次以下の多項式全体を $\mathbb{R}[x]_n$ で表し, さらに $\mathbb{R}[x]_n$ に和とスカラー倍を次で定めます.

$$\begin{aligned}(a_0x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n) &+ (b_0x^n + \cdots + b_{n-1}x + b_n)\\ &= (a_0 + b_0)x^n + \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1})x + (a_n + b_n) \qquad (\text{和})\end{aligned}$$

$$c\,(a_0x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = (ca_0)x^n + \cdots + (ca_{n-1})x + (ca_n) \qquad (\text{スカラー倍})$$

この演算をよく見ると, 係数ごとに処理するところが, ベクトルの和とスカラー倍に似ています. この意味で, 多項式はベクトルと同じ演算の構造を持っています.

定義 15-3 (多項式ベクトル空間)
$\mathbb{R}[x]_n$ に上の演算 (和, スカラー倍) を入れたものを**多項式ベクトル空間**と呼ぶ.

すべての係数が 0 という特別な多項式 $0x^n + \cdots + 0x + 0$ を記号で

$$\mathbf{0} = 0x^n + \cdots + 0x + 0$$

と表します. 数字の 0 と多項式の $\mathbf{0}$ は区別して書いているので注意して下さい. また, 多項式 $f(x)$ と実数 a に対して, $f(x)$ に a を代入したときの値を, $f(x)|_{x=a}$ または $f(a)$ で表します.

定義 15-4 (多項式ベクトル空間の部分空間)
$\mathbb{R}[x]_n$ の部分集合 W が次の条件を全て満たすとき, $\mathbb{R}[x]_n$ の**部分空間**と言う.

(i) $\mathbf{0}$ は W の要素である. つまり, $\mathbf{0} \in W$.

(ii) $g(x)$ と $h(x)$ が W の要素ならば, $g(x) + h(x)$ も W の要素になる. つまり,

$$g(x), h(x) \in W \Longrightarrow g(x) + h(x) \in W$$

(iii) $g(x)$ が W の要素で c が実数ならば, $cg(x)$ も W の要素になる. つまり,

$$g(x) \in W,\ c \in \mathbb{R} \Longrightarrow cg(x) \in W$$

例題 15-3

次の集合は $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間か?

(1) $W_1 = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(1) = 0 \}$　　(2) $W_2 = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(1) \leqq 0 \}$

(解答)

(1) W_1 は定義 15-4 の (i),(ii),(iii) を満たすので $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間である．

(i) $\mathbf{0}$ $(= 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0)$ について $\mathbf{0}|_{x=1} = 0$ より, $\mathbf{0} \in W_1$.

(ii) $g(x), h(x) \in W_1$ とする．$g(1) = h(1) = 0$ より,

$$\big(g(x) + h(x)\big)|_{x=1} = g(1) + h(1) = 0 + 0 = 0$$

よって $g(x) + h(x) \in W_1$ である．

(iii) $g(x) \in W_1$, $c \in \mathbb{R}$ とする．$g(1) = 0$ より,

$$\big(cg(x)\big)|_{x=1} = c \cdot g(1) = c \cdot 0 = 0$$

よって $cg(x) \in W_1$ である．

(2) W_2 は $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間ではない．なぜなら, $g(x) = -x$ とすると, $g(1) = -1 \leqq 0$ より, $g(x) \in W_2$. しかし,

$$\big((-1)g(x)\big)|_{x=1} = -g(1) = 1 > 0$$

となり, $(-1)g(x) \notin W_2$. よって, W_2 は定義 15-4 (iii) を満たさない．

□

問題 15-3 次の集合が $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間かどうか判定せよ．

(1) $W_1 = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f'(x) - xf(x) = \mathbf{0} \}$　(2) $W_2 = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(x)\text{ は 3 次式} \} \cup \{\mathbf{0}\}$

参考文献

[1] 三宅敏恒, 線形代数学, 培風館.