線形代数 (第 15 回) の解答

問題 15-1 の解答

(1) W_1 は定義 15-2 の (i), (ii), (iii) を満たすので, $\mathbb{R}^3$ の部分空間である.

(i) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in W_1$.

(ii) $\vec{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \in W_1$, $\vec{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in W_1$ とする. W_1 の定義より

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \quad \text{かつ} \quad b_1 + 2b_2 + 3b_3 = 0$$

が成り立っているので

$$(a_1 + b_1) + 2(a_2 + b_2) + 3(a_3 + b_3) = (a_1 + 2a_2 + 3a_3) + (b_1 + 2b_2 + 3b_3) = 0$$

よって, $\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix} \in W_1$.

(iii) $\vec{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \in W_1$, $c \in \mathbb{R}$ とする. W_1 の定義より

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0$$

が成り立っているので

$$ca_1 + 2(ca_2) + 3(ca_3) = c(a_1 + 2a_2 + 3a_3) = c \cdot 0 = 0$$

よって, $c\vec{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ ca_3 \end{bmatrix} \in W_1$.

(2) W_2 は $\mathbb{R}^3$ の部分空間ではない. なぜならば, $\vec{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ と $\vec{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ はどちらも W_2 の要素であるが, $\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ は W_2 の要素ではない. よって, W_2 は定義 15-2 (ii) を満たさない.

問題 15-2 の解答

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ と置くと,

$$W = \left\{ \vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; A\vec{\boldsymbol{x}} = \mathbb{O} \right\}$$

と書けるから定理 15-1 により, W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である.

問題 15-3 の解答

(1) W_1 は定義 15-4 の (i), (ii), (iii) を満たすので $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間である.

(i) $\mathbf{0}' - x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} - x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ より $\mathbf{0} \in W_1$.

(ii) $g(x)$, $h(x) \in W_1$ とすると,

$$g'(x) - xg(x) = h'(x) - xh(x) = \mathbf{0}$$

が成り立っているので,

$$\begin{aligned} \big(g(x) + h(x)\big)' - x\big(g(x) + h(x)\big) &= \big(g'(x) + h'(x)\big) - x\big(g(x) + h(x)\big) \\ &= \big(g'(x) - xg(x)\big) + \big(h'(x) - xh(x)\big) \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

よって $g(x) + h(x) \in W_1$ である.

(iii) $g(x) \in W_1$ とすると, $g'(x) - xg(x) = \mathbf{0}$ であるので, $c \in \mathbb{R}$ について

$$\big(cg(x)\big)' - x\big(cg(x)\big) = c \cdot g'(x) - x \cdot c \cdot g(x) = c\big(g'(x) - xg(x)\big) = c \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

よって $cg(x) \in W_1$ である.

(2) W_2 は $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間ではない．なぜならば，$f(x) = x^3 + x$, $g(x) = -x^3 + x$ とすると，$f(x), g(x)$ はどちらも W_2 の要素だが，

$$f(x) + g(x) = 2x \notin W_2.$$

よって，W_2 は定義 15-4 (ii) を満たさない．