線形代数 (第 16 回)

16　ベクトル空間とその部分空間

前回は, 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ と多項式ベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_n$ およびその部分空間について紹介し, それぞれの部分集合が部分空間かどうかの判定問題を考えました. 今回は, より一般に「(抽象) ベクトル空間」とその部分空間について定義し, 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ や多項式ベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_n$ の場合がその例になっていることを説明します.

16-1 ベクトル空間

定義 16-1(ベクトル空間)
集合 V に 2 つの演算:

$$\text{和}: \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \quad (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V) \qquad\qquad \text{スカラー倍}: a\boldsymbol{u} \quad (\boldsymbol{u}\in V,\ a\in\mathbb{R})$$

が定義され, V のどんな要素 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ と実数 a, b に対しても, 次の (1)〜(8) の条件がすべて成り立つとき, V は**ベクトル空間である**と言う.

(1) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

(2) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$

(3) $\boldsymbol{u}+\mathbb{O}=\mathbb{O}+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$ を満たす V の要素 $\mathbb{O}$ が存在する

(4) $a(b\boldsymbol{u})=(ab)\boldsymbol{u}$

(5) $(a+b)\boldsymbol{u}=a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{u}$

(6) $a(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=a\boldsymbol{u}+a\boldsymbol{v}$

(7) $1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$

(8) $0\boldsymbol{u}=\mathbb{O}$

(3) の条件を満たす V の要素 $\mathbb{O}$ を V の**零ベクトル**と呼びます. ベクトル空間, 零ベクトルという名称ですが, **要素は必ずしも普通の意味のベクトルではない**ことに注意してください.

定理 16-1
数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ はベクトル空間である.

(解答)

定義 16-1 の (1)~(8) をチェックすればよい. 以下, $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$ は $\mathbb{R}^n$ の任意の要素とし,

a, b は任意の実数とする.

(1) $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + x_1 \\ \vdots \\ y_n + x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$

(2) $$\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1 + y_1) + z_1 \\ \vdots \\ (x_n + y_n) + z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + (y_1 + z_1) \\ \vdots \\ x_n + (y_n + z_n) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}\right).$$

(3) $\mathbb{O} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ と置く.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \mathbb{O} = \begin{bmatrix} x_1 + 0 \\ \vdots \\ x_n + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbb{O} + \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + x_1 \\ \vdots \\ 0 + x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

(4) $a\left(b\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = a\begin{bmatrix} bx_1 \\ \vdots \\ bx_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(bx_1) \\ \vdots \\ a(bx_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (ab)x_1 \\ \vdots \\ (ab)x_n \end{bmatrix} = (ab)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$

$$(5)\ \ (a+b)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+b)x_1 \\ \vdots \\ (a+b)x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1+bx_1 \\ \vdots \\ ax_n+bx_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bx_1 \\ \vdots \\ bx_n \end{bmatrix}$$

$$= a\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

$$(6)\ \ a(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}) = a\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(x_1+y_1) \\ \vdots \\ a(x_n+y_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1+ay_1 \\ \vdots \\ ax_n+ay_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ay_1 \\ \vdots \\ ay_n \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

$$(7)\ \ 1\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x_1 \\ \vdots \\ 1x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

$$(8)\ \ 0\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0x_1 \\ \vdots \\ 0x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbb{O}.$$

□

多項式ベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_n$ についても, $\mathbb{R}^n$ の場合と同様に (1)∼(8) の性質を満たしていることを確認できます (証明は略). つまり, 次が成り立ちます.

定理 16-2

多項式ベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_n$ もベクトル空間となる.

★ ここで押さえて欲しいポイントは

$\mathbb{R}^n$ も $\mathbb{R}[x]_n$ もベクトル空間の例である！

ということです．また, 今後いろいろ出てくる行列や関数, 数列の集合もベクトル空間の例になります．従って, **ベクトル空間に対して一般理論を展開すれば, 普通の意味のベクトルだけではなく**

多項式や行列, 関数, 数列にも使える強力な理論が手に入る！

ということになります．それが線形代数学です．

16-2 ベクトル空間の部分空間

定義 16-2 (部分空間)
V をベクトル空間とする．V の部分集合 W が V と同じ和とスカラー倍に関して, ベクトル空間であるとき, W は **V の部分空間である**と言う．

部分空間の判定には次の定理が役に立ちます． 証明は文献 [1] の定理 4.1.1 を参照にしてください．

定理 16-3
V をベクトル空間とし, W は V の部分集合とする．このとき, W が V の部分空間であるための必要十分条件は, 次の (i), (ii), (iii) がすべて成り立つことである．

(i) $\mathbb{O} \in W$.
(ii) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$ ならば, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$.
(iii) $\boldsymbol{u} \in W$, $c \in \mathbb{R}$ ならば, $c\boldsymbol{u} \in W$.

つまり, W が V の部分空間であることを示すには, 定理 16-3 の (i), (ii), (iii) をチェックすれば良いということです．これは数ベクトル空間や多項式ベクトル空間の場合と全く同じです．例題で復習しておきます．

例題 16-1

次の集合は $\mathbb{R}^2$ の部分空間か?

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = 0 \right\}, \qquad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; xy = 0 \right\}$$

(解答)

(1) W_1 は定理 16-3 の (i), (ii), (iii) を満たすので, $\mathbb{R}^2$ の部分空間である.

(i) 第 1 成分が 0 なので $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ は W_1 の要素である.

(ii) $\vec{a} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \in W_1$ とする. このとき, W_1 の定義より $x_1 = x_2 = 0$ なので,

$$x_1 + x_2 = 0$$

よって, $\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \in W_1.$

(iii) $\vec{a} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \in W_1,\ c \in \mathbb{R}$ とする. このとき, W_1 の定義より $x_1 = 0$ なので $cx_1 = 0$. よって,

$c\vec{a} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cy_1 \end{bmatrix} \in W_1.$

(2) W_2 は $\mathbb{R}^2$ の部分空間ではない. なぜならば, $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ はどちらも W_2 の要素であるが, $\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ は W_2 の要素ではない. よって, 定理 16-3 (ii) を満たさない.

$\square$

例題 16-2

次の集合は $\mathbb{R}[x]_2$ の部分空間か?

$$W_1 = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_2 \mid f(x) \text{ の } x \text{ の係数は } 0 \}, \qquad W_2 = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_2 \mid f(0) \geqq 0 \}$$

(解答)

(1) W_1 は定理 16-3 の (i), (ii), (iii) を満たすので $\mathbb{R}[x]_2$ の部分空間である.

(i) $\mathbf{0} = 0x^2 + 0x + 0$ の x の係数は 0 なので $\mathbf{0} \in W_1$.

(ii) $g(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $h(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0 \in W_1$ とする. $a_1 = b_1 = 0$ より,

$$g(x) + h(x) = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) = (a_2 + b_2)x^2 + 0x + (a_0 + b_0)$$

よって $g(x) + h(x) \in W_1$.

(iii) $g(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \in W_1$, $c \in \mathbb{R}$ とする. $a_1 = 0$ より,

$$cg(x) = ca_2x^2 + ca_1x + ca_0 = ca_2x^2 + 0x + ca_0$$

よって $cg(x) \in W_1$.

(2) W_2 は $\mathbb{R}[x]_2$ の部分空間ではない. なぜならば, $x+1$ は W_2 の要素だが, $-1 \cdot (x+1)$ は W_2 の要素ではない. よって, 定理 16-3 の (iii) を満たさない.

$\square$

問題 16-1 2×2 型行列全体を $M_2(\mathbb{R})$ と表す. $M_2(\mathbb{R})$ は行列の通常の和とスカラー倍でベクトル空間となる (これは認める). このとき, 次の集合 W_1, W_2 は $M_2(\mathbb{R})$ の部分空間かどうか判定せよ.

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a = d = 0 \right\}, \qquad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a + d = 2 \right\}$$

例題 16-3

V をベクトル空間とし, W_1, W_2 が V の部分空間とする. このとき, $W_1 \cap W_2$ も V の部分空間であることを示せ.

(解答)

$W_1 \cap W_2$ が定理 16-3 の (i),(ii),(iii) を満たすことを確認すればよい.

(i) W_1 と W_2 はどちらも V の部分空間なので, $\mathbb{O} \in W_1$ かつ $\mathbb{O} \in W_2$. よって $\mathbb{O} \in W_1 \cap W_2$.

(ii) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W_1 \cap W_2$ とする. このとき, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W_1$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W_2$ であり, W_1 と W_2 は V の部分空間より $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W_1$, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W_2$ であるので, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W_1 \cap W_2$.

(iii) $\boldsymbol{u} \in W_1 \cap W_2$, $c \in \mathbb{R}$ とする. $\boldsymbol{u} \in W_1$ で W_1 は部分空間より, $c\boldsymbol{u} \in W_1$. 同様に, $\boldsymbol{u} \in W_2$ で W_2 は部分空間より, $c\boldsymbol{u} \in W_2$. よって $c\boldsymbol{u} \in W_1 \cap W_2$.

□

問題 16-2 V をベクトル空間とし, W_1, W_2 が V の部分空間とする. このとき,

$$W_3 = \{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{u} \in W_1,\ \boldsymbol{v} \in W_2\}$$

は V の部分空間であることを示せ.

問題 16-3 V をベクトル空間とし, W_1, W_2 が V の部分空間とする. $W_1 \cup W_2$ が V の部分空間ならば, $W_1 \subset W_2$ または $W_2 \subset W_1$ となることを示せ.

参考文献

[1] 三宅敏恒, 線形代数学, 培風館.