線形代数 (第16回) の解答

問題 16-1 の解答

(1) 次のように, W_1 は定理 16-3 の (i), (ii), (iii) を満たすので, $M_2(\mathbb{R})$ の部分空間である.

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W_1$　　($\because$ (1,1) 成分と (2,2) 成分はどちらも 0)

(ii) $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \in W_1$, $\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in W_1$ とする. このとき, $a_1 = d_1 = 0$, $a_2 = d_2 = 0$ が成り立っているので, $a_1 + a_2 = d_1 + d_2 = 0$. よって,

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \in W_1.$$

(iii) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W_1$, $r \in \mathbb{R}$ とする. このとき $a = d = 0$ が成り立っているので $ra = rd = 0$. よって, $r\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{bmatrix} \in W_1$.

(2) W_2 は $M_2(\mathbb{R})$ の部分空間ではない. なぜならば,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in W_2 \qquad (\because 1 + 1 = 2)$$

だが,

$$2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \notin W_2 \qquad (\because 2 + 2 = 4 \neq 2)$$

となり, 定理 16-3 の (iii) を満たさないからである.

問題 16-2 の解答

W_3 が定理 16-3 の (i), (ii), (iii) を満たすことを確認すればよい.

(i) W_1 と W_2 は V の部分空間なので, $\mathbb{O} \in W_1$ かつ $\mathbb{O} \in W_2$. これと $\mathbb{O}$ の定義より

$$\mathbb{O} = \mathbb{O} + \mathbb{O} \in W_3$$

(ii) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W_3$ とする．このとき, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1 \in W_1$ と $\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2 \in W_2$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$$

と表せる．$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{v}_1 \in W_1$ であり, W_1 は V の部分空間であるから, $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1 \in W_1$．同様に, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{v}_2 \in W_2$ であり, W_2 は V の部分空間であるから, $\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_2 \in W_2$．従って

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1) + (\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_2) \in W_3$$

(iii) $\boldsymbol{x} \in W_3$, $c \in \mathbb{R}$ とする．このとき, $\boldsymbol{u} \in W_1$ と $\boldsymbol{v} \in W_2$ を用いて $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ と表せる．W_1, W_2 は部分空間であるから $c\boldsymbol{u} \in W_1$, $c\boldsymbol{v} \in W_2$．よって,

$$\boldsymbol{x} = c(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = c\boldsymbol{u} + c\boldsymbol{v} \in W_3$$

問題 16-3 の解答

対偶を証明する．つまり,

$$W_1 \not\subset W_2 \text{ かつ } W_2 \not\subset W_1 \quad \Longrightarrow \quad W_1 \cup W_2 \text{ は } V \text{ の部分空間ではない}$$

を示す．$W_1 \not\subset W_2$ かつ $W_2 \not\subset W_1$ とすると,

$$\boldsymbol{u} \in W_1 \text{ かつ } \boldsymbol{u} \notin W_2 \text{ となる要素 } \boldsymbol{u} \qquad \cdots ①$$

$$\boldsymbol{v} \in W_2 \text{ かつ } \boldsymbol{v} \notin W_1 \text{ となる要素 } \boldsymbol{v} \qquad \cdots ②$$

が存在する．このとき, $\boldsymbol{u} \in W_1 \cup W_2$ かつ $\boldsymbol{v} \in W_1 \cup W_2$ であるが,

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \notin W_1 \cup W_2$$

なぜなら, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W_1$ ならば, $\boldsymbol{u} \in W_1$ より, $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{u} \in W_1$ となって②に矛盾し, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W_2$ ならば, $\boldsymbol{v} \in W_2$ より $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v} \in W_2$ となって①に矛盾するからである．以上により, $W_1 \cup W_2$ は定理 16-3 の (ii) を満たさないので, V の部分空間ではない.