線形代数 (第 17 回)

17　1 次独立と 1 次従属の定義と例

一般のベクトル空間において幾何学をやる為には, まずは「座標」の概念が必要になります. 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ の場合であれば, xy 座標や xyz 座標があります. $\mathbb{R}^2$ の場合だと, 2 つの数ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ がそれぞれ x 座標, y 座標の役割を果たします. 例えば, 平面の点 $P = (2,3)$ であれば

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と表せます. 座標とは, このように, 点 $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ を表すベクトルを, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とで書き表したときの係数のことに他なりません. この概念を一般のベクトル空間にも持ち込むことを考えます.

ベクトル空間 V の要素 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ が V の座標の役割を果たすのに必要な条件として, 座標の表し方が 1 通りであることが挙げられます. 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ で, ある点の座標は $(1,1,1)$ であり, かつ $(2,-1,3)$ でもあるというような事は起こりません. 座標の表し方は 1 通りだからです. これを一般のベクトル空間 V とその要素 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ で考えてみると, 以下の性質が必要です.

$$a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 = b_1\boldsymbol{u}_1 + b_2\boldsymbol{u}_2 \implies a_1 = b_1,\ a_2 = b_2$$

要するに, 同じ点を 2 通りに表せないということです. 上式は

$$(a_1 - b_1)\boldsymbol{u}_1 + (a_2 - b_2)\boldsymbol{u}_2 = \mathbb{O} \implies a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = 0$$

と変形できます. つまり, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ が

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 = \mathbb{O} \implies c_1 = c_2 = 0$$

を満たす必要があります. これが次の定義の意味です.

定義 17-1 (1 次独立と 1 次従属)

(1) ベクトル空間 V の要素 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ について,

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \mathbb{O}$$

を満たす実数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ が $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ のみであるとき, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は 1 **次独立である**と言う.

(2) 逆に, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が 1 次独立でないとき, すなわち,

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \mathbb{O}$$

を満たす実数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ で $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ 以外のものが存在するとき, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は 1 **次従属である**と言う.

数ベクトル空間で例を確認しておきます.

例題 17-1

$\mathbb{R}^2$ の次の 2 つのベクトルは 1 次独立であるか?

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

[解答]

$$c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

とする. これは連立方程式

$$\begin{cases} 2c_1 + c_2 = 0 \\ \ \ c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

を意味し, その解は $c_1 = c_2 = 0$ のみである. よって $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ は 1 次独立である.

□

例題 17-2

$\mathbb{R}^2$ の次の 3 つのベクトルは 1 次独立であるか?

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

[解答]

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

とする．これは連立方程式

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 - \ \ c_3 = 0 \\ 2c_1 - \ \ c_2 + 5c_3 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

を意味し,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \end{bmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

より, 解は $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 以外にも存在する (例えば, $c_1 = -2,\ c_2 = 1,\ c_3 = 1$ など)．よって $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ は 1 次従属である.

$\square$

[注意] A を $m \times n$ 行列としたとき, 連立方程式

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

が自明でない解を持つ条件は $\mathrm{rank}(A) < n$ でした (定理 7-2 を参照)．例題 17-2 の場合だと, $n = 3$ で, 上の基本変形から

$$\mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \right) = 2 < 3$$

なので, (1) は自明でない解を持つことが分かります. $\square$

問題 17-1

(1) $\mathbb{R}^2$ の次の 2 つのベクトルは 1 次独立であるか?

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(2) $\mathbb{R}^3$ の次の 3 つのベクトルは 1 次独立であるか?

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

問題 17-2 $\mathbb{R}^2$ の次の 2 つのベクトルが 1 次従属のとき, 実数 a の値を求めよ.

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$$

次は多項式ベクトル空間の例を見ておきます.

例題 17-3

多項式ベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_2$ において, 次の 3 つのベクトルは 1 次独立であるか?

$$f_1(x) = x^2 + 2x + 1, \quad f_2(x) = x^2 - x + 1, \quad f_3(x) = 2x^2 + x + 1.$$

[解答]

$$c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x) + c_3 \cdot f_3(x) = \mathbf{0} \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

とする.

$$(\text{左辺}) = (c_1 + c_2 + 2c_3)x^2 + (2c_1 - c_2 + c_3)x + (c_1 + c_2 + c_3)$$

であるので, これは連立方程式

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \\ 2c_1 - c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

を意味する.

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
$$

$$
\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

より, 解は $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ のみである. よって $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ は 1 次独立である.

□

例題 17-4

多項式ベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_2$ において, 次の 3 つのベクトルは 1 次独立であるか?

$$
f_1(x) = x^2 + x + 1, \quad f_2(x) = x^2 + 2x + 3, \quad f_3(x) = x + 2.
$$

[解答]

$$
c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x) + c_3 \cdot f_3(x) = \mathbf{0} \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})
$$

とする.

$$
(\text{左辺}) = (c_1 + c_2)x^2 + (c_1 + 2c_2 + c_3)x + (c_1 + 3c_2 + 2c_3)
$$

であるので, これは連立方程式

$$
\begin{cases} c_1 + c_2 \phantom{{}+ 2c_3} = 0 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + 3c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases}
$$

を意味し,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より, 解は $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 以外にも存在する (例えば, $c_1 = 1,\ c_2 = -1,\ c_3 = 1$ など). よって $f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)$ は 1 次従属である.

□

問題 17-3 多項式ベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_2$ において, 次の 3 つのベクトルは 1 次独立であるか?

$$f_1(x) = x^2 + 1, \quad f_2(x) = x^2 + x + 1, \quad f_3(x) = 2x + 1.$$

問題 17-4 2 次多項式 $f(x) \in \mathbb{R}[x]_2$ に対して, $f(x),\ f'(x),\ f''(x)$ は 1 次独立であることを示せ.

定義 17-2 (1 次結合と 1 次関係)

(1) ベクトル空間 V の要素 $\boldsymbol{v}$ が, V の要素 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ を用いて

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n \qquad (c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R})$$

と書けるとき, $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ の 1 **次結合で書ける**と言う.

(2) ベクトル空間 V の要素 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \mathbb{O} \quad (c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}) \qquad \cdots (*)$$

をみたすとき, $(*)$ を $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ の 1 **次関係**と言う.

例えば, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ は $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ の 1 次結合で書けます. なぜならば,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

と表せるからです. また,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

は $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ の 1 次関係です.

次に, $\mathbb{R}[x]_2$ において考えます. $f_1(x)=x^2+x+1$ は $f_2(x)=x^2+2x+3$ と $f_3(x)=x+2$ の 1 次結合で書けます. なぜなら,

$$f_1(x)=f_2(x)-f_3(x)$$

と表せるからです. また, $f_1(x)-f_2(x)+f_3(x)=\mathbf{0}$ は $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ の 1 次関係です.

$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\dots,\boldsymbol{u}_n$ が何であっても, 1 次関係は最低 1 個は必ず存在します. それは

$$0\cdot\boldsymbol{u}_1+\cdots+0\cdot\boldsymbol{u}_n=\mathbb{O}$$

であり, これを**自明な 1 次関係**と呼びます. しかし, 自明でない 1 次関係は, いつでも存在するとは限りません. 1 次独立, 1 次従属の定義は次のようにも言い換えられます.

定義 17-1 の言い換え

(1) V の要素 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\dots,\boldsymbol{u}_n$ の間に自明でない 1 次関係が存在しないならば, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2,\dots,\boldsymbol{u}_n$ は 1 次独立である.

(2) V の要素 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2,\dots,\boldsymbol{u}_n$ の間に自明でない 1 次関係が存在するならば, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2,\dots,\boldsymbol{u}_n$ は 1 次従属である.

問題 17-5

(1) $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$ を $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ の 1 次結合で表せ.

(2) $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$ の自明でない 1 次関係を一つ求めよ.