線形代数 (第 17 回) の解答

問題 17-1 の解答

(1)

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

とする．これは連立方程式

$$\begin{cases} c_1 \qquad\quad = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases}$$

を意味し, その解は $c_1 = c_2 = 0$ のみである．よって $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ は 1 次独立である．

(2)

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

とする．これは連立方程式

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0 \\ \qquad\ \ 3c_2 + 6c_3 = 0 \end{cases}$$

を意味し,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

より, 解は $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 以外にも存在する．よって $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ は 1 次従属である．

問題 17-2 の解答

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$ は 1 次従属より,

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を満たす $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ で, c_1, c_2 のいずれかは 0 ではないものが取れる. これは c_1, c_2 に関する連立方程式

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + ac_2 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

が自明でない解を持つことを意味する.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix}$$

より, (1) が自明でない解を持つための条件は $a = 1$.

問題 17-3 の解答

$$c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x) + c_3 \cdot f_3(x) = \mathbf{0} \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

とする.

$$(\text{左辺}) = (c_1 + c_2)x^2 + (c_2 + 2c_3)x + (c_1 + c_2 + c_3)$$

であるので, これは連立方程式

$$\begin{cases} c_1 + c_2 \phantom{{}+2c_3} = 0 \\ \phantom{c_1 + {}} c_2 + 2c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

を意味し,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

より, 解は $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ のみである. よって $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ は 1 次独立である.

問題 17-4 の解答

$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ $(a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R})$ と置く．$f(x)$ は 2 次多項式より $a_2 \neq 0$. また

$$f'(x) = 2a_2x + a_1, \qquad f''(x) = 2a_2$$

となる．ここで,

$$c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot f'(x) + c_3 \cdot f''(x) = \mathbf{0} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

とする．

$$(\text{左辺}) = a_2c_1x^2 + (a_1c_1 + 2a_2c_2)x + (a_0c_1 + a_1c_2 + 2a_2c_3)$$

であるので,

$$\begin{cases} a_2c_1 & = 0 \\ a_1c_1 + 2a_2c_2 & = 0 \qquad (1) \\ a_0c_1 + a_1c_2 + 2a_2c_3 & = 0 \qquad (2) \end{cases}$$

$a_2 \neq 0$ より $c_1 = 0$ となる．$c_1 = 0$, $a_2 \neq 0$ より, (1) から $c_2 = 0$ となる．$c_1 = c_2 = 0$, $a_2 \neq 0$ より, (2) から $c_3 = 0$. よって $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ は 1 次独立である．

問題 17-5 の解答

(1) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(2) $7\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$