線形代数 (第18回)

18　1 次独立 · 1 次従属の判定と性質

ベクトル空間 V の要素 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ について

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \mathbb{O}$$

を満たす実数 $c_1, c_2, ..., c_n$ が $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ のみであるとき, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は 1 **次独立である**と言い, そうでないとき, 1 **次従属である**と言いました. 前回は, 数ベクトル空間や多項式ベクトル空間で, 1 次独立 · 1 次従属の判定をみました. 今回はまず, 一般的なベクトル空間で, 1 次独立 · 1 次従属の判定の仕方についてみます. 後半では, 1 次独立 · 1 次従属の基本的な性質について紹介します.

1 次独立 · 1 次従属の判定

ここでは, 例題を通して, 1 次独立 · 1 次従属の判定の仕方について学びます.

例題 18-1
ベクトル空間 V の要素 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ に対して

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \quad \boldsymbol{w}_2 = 2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$$

と置く. $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ が 1 次独立であるとき, $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$ は 1 次独立か 1 次従属かを判定せよ.

[解答]

$$c_1\boldsymbol{w}_1 + c_2\boldsymbol{w}_2 = \mathbb{O} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

とする. $\boldsymbol{w}_1$ と $\boldsymbol{w}_2$ の定義より

$$(\text{左辺}) = c_1(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) + c_2(2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) = (c_1 + 2c_2)\boldsymbol{u}_1 + (c_1 - c_2)\boldsymbol{u}_2$$

$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ は 1 次独立なので

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 0 \\ c_1 - \ \ c_2 = 0 \end{cases} \qquad \cdots (*)$$

連立方程式 $(*)$ の係数行列を基本変形すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

従って, $(*)$ の解は $\underline{c_1 = c_2 = 0 \text{ のみ}}$. よって, $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$ は 1 次独立である.

□

[復習]　定理 7-2 の主張を思い出しておきます. $m \times n$ 型行列 A に対して, n 変数 1 次連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbb{O}$ を考えるとき, 次が成り立ちました.

(1) $A\boldsymbol{x} = \mathbb{O}$ は自明な解のみ $\Leftrightarrow$ $A\boldsymbol{x} = \mathbb{O}$ の解はただ一つ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A) = n$.

(2) $m < n$ ならば, $A\boldsymbol{x} = \mathbb{O}$ は自明でない解を持つ.

例題 18-1 では, 係数行列の階数 (=2) と変数の個数 (=2) が一致するので, (1) より $(*)$ の解は自明なものしかありません.

例題 18-2

ベクトル空間 V の要素 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ に対して

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3, \qquad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + 4\boldsymbol{u}_3, \qquad \boldsymbol{w}_3 = 2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3$$

と置く. $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が 1 次独立のとき, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3$ は 1 次独立か 1 次従属かを判定せよ.

[解答]

$$c_1\boldsymbol{w}_1 + c_2\boldsymbol{w}_2 + c_3\boldsymbol{w}_3 = \mathbb{O} \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

とする. $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3$ の定義より

$$c_1(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3) + c_2(\boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + 4\boldsymbol{u}_3) + c_3(2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3) = \mathbb{O}$$

これを整理して

$$(c_1 + c_2 + 2c_3)\boldsymbol{u}_1 + (-c_1 + 2c_2 - c_3)\boldsymbol{u}_2 + (c_1 + 4c_2 + 3c_3)\boldsymbol{u}_3 = \mathbb{O}$$

$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ は 1 次独立なので,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \\ -c_1 + 2c_2 - c_3 = 0 \\ c_1 + 4c_2 + 3c_3 = 0 \end{cases} \qquad \cdots (*)$$

連立方程式 $(*)$ の係数行列を基本変形すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

行列の階数 $(= 2)$ は変数の個数 $(= 3)$ より小さいので, $(*)$ の解は $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 以外にも存在する. よって, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3$ は 1 次従属である.

□

問題 18-1　ベクトル空間 V の要素 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ に対して

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3, \quad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3, \quad \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3$$

と置く. $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が 1 次独立のとき, $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, $\boldsymbol{w}_3$ は 1 次独立か 1 次従属かを判定せよ.

問題 18-2　ベクトル空間 V の要素 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ に対して

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + 4\boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4, \qquad \boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + 8\boldsymbol{u}_3 + 3\boldsymbol{u}_4,$$
$$\boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4, \qquad \boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{u}_1 + 4\boldsymbol{u}_4$$

と置く. $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ が 1 次独立のとき, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ は 1 次独立か 1 次従属かを判定せよ.

1 次独立 · 1 次従属の性質

ここでは, 1 次独立 · 1 次従属の基本的な性質について確認します. 証明は煩雑になるのを避けるため, 限定した場合で与えています (アイデアは一般の場合も同様).

定理 18-1

ベクトル空間 V の要素 $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ ..., \boldsymbol{u}_n$ について, 次の 2 つの命題は同値である.

$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n$ は 1 次従属である $\iff$ $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n$ のうち少なくとも 1 つは他の $n-1$ 個のベクトルの 1 次結合で書ける

[証明]

$n=3$ の場合を証明する.

$\Rightarrow$ の証明. $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ が 1 次従属ならば, 少なくとも 1 つは 0 でない実数 c_1, c_2, c_3 で

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_3 = \mathbb{O}$$

を満たすものが存在する. 例えば, $c_1 \neq 0$ とすると

$$\boldsymbol{u}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\boldsymbol{u}_2 - \frac{c_3}{c_1}\boldsymbol{u}_3$$

となり, $\boldsymbol{u}_1$ は $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ の 1 次結合で書ける.

$\Leftarrow$ の証明. $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ について, 例えば

$$\boldsymbol{u}_1 = c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_3 \qquad (c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

が成り立っているならば,

$$(-1)\cdot\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_3 = \mathbb{O}$$

は自明でない 1 次関係で, 従って $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ は 1 次従属である.

□

定理 18-2

ベクトル空間 V の要素 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n$ を考える. $m < n$ のとき,

$$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_m \text{ は 1 次従属である} \Longrightarrow \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n \text{ も 1 次従属である}$$

[証明]

$m=3,\ n=4$ のときを証明をする. $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ が 1 次従属ならば, 少なくとも 1 つは 0 でない実数 $c_1,\ c_2,\ c_3$ で

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_3 = \mathbb{O}$$

を満たすものが存在する. このとき,

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_3 + 0\cdot\boldsymbol{u}_4 = \mathbb{O}$$

は, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$ の間の自明でない 1 次関係であるので, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$ は 1 次従属である.

□

定理 18-3

m, n は自然数で $m > n$ を満たすとする．ベクトル空間 V の要素 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_m$ と $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n$ に対して次が成り立つ．

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_m \text{はそれぞれ} \\ \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n \text{の 1 次結合で書ける} \end{array} \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_m \text{ は 1 次従属である}$$

[**証明**] $m = 3, n = 2$ の場合を証明する．条件より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= a_{11}\boldsymbol{u}_1 + a_{21}\boldsymbol{u}_2 \qquad (a_{11}, a_{21} \in \mathbb{R}) \\ \boldsymbol{v}_2 &= a_{12}\boldsymbol{u}_1 + a_{22}\boldsymbol{u}_2 \qquad (a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R}) \\ \boldsymbol{v}_3 &= a_{13}\boldsymbol{u}_1 + a_{23}\boldsymbol{u}_2 \qquad (a_{13}, a_{23} \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

と書けている．定理 7-2 (2) により, 連立方程式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

は $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ 以外の解を持つ．それを

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

とすると

$$\begin{aligned} c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 &= c_1(a_{11}\boldsymbol{u}_1 + a_{21}\boldsymbol{u}_2) + c_2(a_{12}\boldsymbol{u}_1 + a_{22}\boldsymbol{u}_2) + c_3(a_{13}\boldsymbol{u}_1 + a_{23}\boldsymbol{u}_2) \\ &= (c_1a_{11} + c_2a_{12} + c_3a_{13})\boldsymbol{u}_1 + (c_1a_{21} + c_2a_{22} + c_3a_{23})\boldsymbol{u}_2 \\ &= 0 \cdot \boldsymbol{u}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{u}_2 \\ &= \mathbb{O} \end{aligned}$$

これは $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ の間の自明でない 1 次関係なので, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ は 1 次従属である．

□

問題 18-3 m, n は自然数で $m > n$ とする．このとき, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ... , $\boldsymbol{u}_m$ が 1 次独立ならば, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ... , $\boldsymbol{u}_n$ も 1 次独立であることを示せ．

問題 18-4 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ... , $\boldsymbol{u}_m$ が 1 次独立で, $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{u}_m$ と $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ... , $\boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合で表されるならば, c_1, c_2, ... , c_m はただ 1 通りに決まることを示せ．