線形代数 (第 18 回) の解答

問題 18-1 の解答

$$c_1\boldsymbol{w}_1 + c_2\boldsymbol{w}_2 + c_3\boldsymbol{w}_3 = \mathbb{O} \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

とする. $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3$ の定義より

$$c_1(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3) + c_2(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3) + c_3(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3) = \mathbb{O}$$

これを整理して

$$(c_1 + c_2 + c_3)\boldsymbol{u}_1 + (c_1 - c_2)\boldsymbol{u}_2 + (c_1 + c_2 + c_3)\boldsymbol{u}_3 = \mathbb{O}$$

$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ は 1 次独立なので,

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 0 \\ c_1 & - & c_2 & & & = & 0 \\ c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \cdots(*)$$

連立方程式 $(*)$ の係数行列を基本変形すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となり, 階数 $(= 2)$ は変数の個数 $(= 3)$ と異なるので, $(*)$ の解は $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 以外にも存在する. よって $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3$ は 1 次従属である.

問題 18-2 の解答

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 + c_4\boldsymbol{v}_4 = \mathbb{O} \qquad (c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R})$$

とする. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ の定義より

$$\begin{aligned} &c_1(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + 4\boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4) + c_2(2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + 8\boldsymbol{u}_3 + 3\boldsymbol{u}_4) \\ &\qquad + c_3(2\boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4) + c_4(\boldsymbol{u}_1 + 4\boldsymbol{u}_4) = \mathbb{O} \end{aligned}$$

これを整理して

$$\begin{aligned} &(c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4)\boldsymbol{u}_1 + (-c_1 - c_2 - 2c_3)\boldsymbol{u}_2 \\ &\qquad + (4c_1 + 8c_2 + 3c_3)\boldsymbol{u}_3 + (c_1 + 3c_2 + c_3 + 4c_4)\boldsymbol{u}_4 = \mathbb{O} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ は 1 次独立より,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} c_1 & + & 2c_2 & + & 2c_3 & + & c_4 & = 0 \\ -c_1 & - & c_2 & - & 2c_3 & & & = 0 \\ 4c_1 & + & 8c_2 & + & 3c_3 & & & = 0 \\ c_1 & + & 3c_2 & + & c_3 & + & 4c_4 & = 0 \end{array}\right. \qquad \cdots (*)$$

連立方程式 $(*)$ の係数行列を基本変形すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

従って $(*)$ の解は $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ のみ. よって $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ は 1 次独立である.

問題 18-3 の解答

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \mathbb{O} \quad (c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R})$$

とする. このとき,

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n + 0 \cdot \boldsymbol{u}_{n+1} + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{u}_m = \mathbb{O}$$

は $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ... , $\boldsymbol{u}_m$ は 1 次独立より $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. よって $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ... , $\boldsymbol{u}_n$ も 1 次独立.

[別証]

定理 18-2 の対偶を取ると,

$$\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{u}_m \text{ は 1 次従属でない} \Rightarrow \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{u}_n \text{ も 1 次従属でない}$$

これは,

$$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_m \text{ は 1 次独立} \Rightarrow \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n \text{ も 1 次独立}$$

を意味する.

問題 18-4 の解答

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{u}_m$$
$$\boldsymbol{v} = d_1\boldsymbol{u}_1 + d_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + d_m\boldsymbol{u}_m$$

と $\boldsymbol{v}$ が 2 通りに表せたとする. 辺々を引いて

$$\mathbb{O} = (c_1 - d_1)\boldsymbol{u}_1 + (c_2 - d_2)\boldsymbol{u}_2 + \cdots + (c_m - d_m)\boldsymbol{u}_m$$

$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_m$ は 1 次独立なので

$$c_1 - d_1 = c_2 - d_2 = \cdots = c_m - d_m = 0$$

よって $c_1 = d_1, c_2 = d_2, \dots, c_m = d_m$.