線形代数 (第19回)

19　1次独立なベクトルの最大個数

前々回と前回で, 与えられたベクトルの組が1次独立か1次従属かを判別する方法を説明しました. 今回は, **ベクトルの組が1次従属となった場合の続きの内容**です. 例えば,

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \cdots ①$$

とすると, $\boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{0}$ なので, この3つで考えると1次従属ですが, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ の2つだけで考えると1次独立になっています. このように, 今回は

1次従属な組の中から1次独立な部分を抜き出す！

ということを考えます.

定義 19-1
　ベクトル空間 V の要素の集合 X の中に r 個の1次独立なベクトルがあり, かつ, X のどの $r+1$ 個のベクトルも1次従属であるとき, r のことを **$\boldsymbol{X}$ の1次独立の最大個数**という.

例えば, ① の $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ で考えると, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ は1次独立で, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ は1次従属なので, 1次独立の最大個数は2となります. より複雑な例を考える場合には次の定理が有用です.

定理 19-1
　$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_m$ の中に r 個の1次独立なベクトルがあり, 他の $m-r$ 個のベクトルはこの r 個のベクトルの1次結合で表せるとする. このとき, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_m$ の1次独立の最大個数は r である.

[証明]
$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_m$ の中の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_r$ が1次独立であるとし, 残りの $m-r$ 個のベクトルは

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_r$ の 1 次結合で書けると仮定する．このとき，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_m$ の中の任意の $r+1$ 個のベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{w}_{r+1}$ は，それぞれ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_r$ の 1 次結合で書ける．定理 18-3 より，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{w}_{r+1}$ は 1 次従属である．従って $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_m$ の 1 次独立の最大個数は r である．

□

例題 19-1

次の $\mathbb{R}^3$ のベクトルの組の 1 次独立の最大個数 r を求めよ．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

[解答]

$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_4$ は明らかに 1 次独立で，また $\boldsymbol{a}_3$ と $\boldsymbol{a}_5$ はそれぞれ

$$\boldsymbol{a}_3 = -\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2, \qquad \boldsymbol{a}_5 = 2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4$$

と $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_4$ の 1 次結合で書ける．よって，定理 19-1 より $r = 3$ である．

□

例題 19-2

次の $\mathbb{R}^3$ のベクトルの組の 1 次独立の最大個数 r を求めよ．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

[解答]

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 + c_5\boldsymbol{a}_5 = \mathbb{O} \qquad (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}) \qquad \cdots ①$$

とすると

$$(\text{左辺}) = \begin{bmatrix} c_1 + c_3 + 2c_5 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 + 3c_5 \\ 2c_1 + c_2 + 3c_3 + c_4 + 5c_5 \end{bmatrix}$$

よって

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrl} c_1 & & & + & c_3 & & & + & 2c_5 & = 0 \\ c_1 & + & c_2 & + & 2c_3 & & & + & 3c_5 & = 0 \\ 2c_1 & + & c_2 & + & 3c_3 & + & c_4 & + & 5c_5 & = 0 \end{array} \right.$$

係数行列を基本変形すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

となるので

$$\begin{cases} c_1 \quad + c_3 \quad + 2c_5 = 0 \\ \quad c_2 + c_3 \quad + c_5 = 0 \\ \qquad c_4 \qquad = 0 \end{cases}$$

つまり

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_5 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \cdots ②$$

① と ② で c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 は共通なので, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5$ の間の 1 次独立 ·1 次従属の関係は,

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

の関係とまったく同じになる. $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_4$ は 1 次独立で,

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2, \quad \boldsymbol{b}_5 = 2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$$

従って, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ も 1 次独立で,

$$\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \quad \boldsymbol{a}_5 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$$

よって $r = 3$ となる.

□

例題 19-3

次の $\mathbb{R}[x]_2$ の多項式の組の 1 次独立の最大個数 r を求めよ.

$$f_1(x) = 1 + x + 3x^2, \qquad f_2(x) = 1 + 2x$$
$$f_3(x) = 2 + 3x + 3x^2, \qquad f_4(x) = -2 - 4x + x^2$$
$$f_5(x) = 2 + 2x + 7x^2$$

[解答]

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) + c_4 f_4(x) + c_5 f_5(x) = \mathbf{0} \qquad (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}) \qquad \cdots ③$$

とする.

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) = (c_1 + c_2 + 2c_3 - 2c_4 + 2c_5) + (c_1 + 2c_2 + 3c_3 - 4c_4 + 2c_5)x \\ + (3c_1 + 3c_3 + c_4 + 7c_5)x^2\end{aligned}$$

であるので

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} c_1 & + & c_2 & + & 2c_3 & - & 2c_4 & + & 2c_5 & = 0 \\ c_1 & + & 2c_2 & + & 3c_3 & - & 4c_4 & + & 2c_5 & = 0 \\ 3c_1 & & & + & 3c_3 & + & c_4 & + & 7c_5 & = 0 \end{array}\right.$$

係数行列を基本変形すると

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 7 & 1 \end{bmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

となるので

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} c_1 & & & + & c_3 & & + & 2c_5 = 0 \\ & & c_2 & + & c_3 & & + & 2c_5 = 0 \\ & & & & & c_4 & + & c_5 = 0 \end{array}\right.$$

つまり

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_5 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \cdots ④$$

③ と ④ で c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 は共通なので, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$, $f_5(x)$ の間の 1 次独立 ·1 次従属の関係は,

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

の間の関係とまったく同じになる. $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_4$ は 1 次独立で, $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_5 = 2\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_4$ より, $f_1(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ も 1 次独立で,

$$f_3(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad f_5(x) = 2f_1(x) + 2f_2(x) + f_4(x)$$

従って $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$, $f_5(x)$ の 1 次独立の最大個数は $r = 3$ である.

□

問題 19-1 次の $\mathbb{R}^3$ のベクトルの組の 1 次独立の最大個数 r を求めよ.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

問題 19-2 次の $\mathbb{R}[x]_2$ の多項式の組の 1 次独立の最大個数 r を求めよ.

$$f_1(x) = 1 - x, \qquad f_2(x) = 1 + x, \qquad f_3(x) = 1 + x + x^2, \qquad f_4(x) = 1 + x^2$$

行列 A の階数 (ランク) は, A を基本変形で簡約化したときの主成分を含む列の個数のことでした (線形代数の資料 5 回目). 行で言い換えても同じで, 行列 A の階数 (ランク) は, A を基本変形で簡約化したときの主成分を含む行の個数とも言えます. 例題 19-2, 19-3 の解答をよく見てみると, 係数行列を基本変形で簡約化したときの主成分を含む列の個数は, A の 1 次独立な列ベクトルの最大個数と一致することが分かります. このことは, 行に着目した場合も同じことが言えます.

定理 19-2
行列 A に対して次が成立する.

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}(A) &= A \text{ の列ベクトルの 1 次独立な最大個数} \\ &= A \text{ の行ベクトルの 1 次独立な最大個数} \end{aligned}$$

[証明]
文献 [1] の定理 4.3.3 を参照のこと.

□

定理 19-2 の使い方は, 問題 19-1, 19-2 の解答のコメントの部分を見てください. 定理 19-2 より, 特に次の性質が成り立ちます.

定理 19-3

n 次正方行列 A について, 次の条件は同値である.

(1) A は正則行列である.

(1') A の階数 (ランク) は n である.

(1") A の行列式は 0 でない.

(2) A の n 個の列ベクトルは 1 次独立である.

(3) A の n 個の行ベクトルは 1 次独立である.

[証明]

(1)⇔(1') は定理 8-3, (1)⇔(1") は定理 13-3 から従う. (1')⇔(2)⇔(3) は定理 19-2 の $\mathrm{rank}(A) = n$ の場合である.

□

例題 19-4

次のベクトルの組が 1 次独立であることを示せ.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

[解答]

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を並べた行列の行列式を考える.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

(行列の計算方法は資料 10〜12 回目を参照). よって, 定理 19-3 より $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立である.

□

問題 19-3 次のベクトルの組が 1 次従属であるための a の条件を求めよ.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} a \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

参考文献

[1] 三宅敏恒, 線形代数学, 培風館.