線形代数 (第 20 回)

20 ベクトル空間の基底と次元

今回はベクトル空間の基底について説明します.

定義 20-1 (基底)

ベクトル空間 V のベクトルの組 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ が V の**基底**であるとは, 次の 2 つの条件を満たすことである.

(i) V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ の 1 次結合で書ける.

(ii) $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は 1 次独立である.

$\ast$ (i) の条件を満たすとき, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は **$\boldsymbol{V}$ を生成する**という.

基底はベクトル空間において, 「座標軸」に相当します. 条件 (i) は, V のすべての点が「座標軸」でカバーされていること, 条件 (ii) は「座標軸」に無駄が無いことを意味します.

例題 20-1

ベクトルの組

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \cdots①$$

は, $\mathbb{R}^2$ の基底になることを示せ.

[証明]

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ が定義 20-1 の条件 (i), (ii) を満たすことを確認すればよい.

(i) $\mathbb{R}^2$ の任意のベクトル $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ は

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2$$

と $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ の 1 次結合で書ける.

(ii) $c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 = \mathbb{O}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ とすると,

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

より $c_1 = c_2 = 0$. よって, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ は 1 次独立である.

以上 (i), (ii) により $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ は $\mathbb{R}^2$ の基底である.

□

[**注意**] $\mathbb{R}^n$ のベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

を $\mathbb{R}^n$ の**基本ベクトル**と呼びます. 例題 20-1 と同様に $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底であることが確かめられます. これを $\mathbb{R}^n$ の**標準基底**と呼びます.

例題 20-2

次の $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底か?

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[**解答**]

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 \;\; (c_1, c_2 \in \mathbb{R}) \cdots (*)$$

なら,

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_1\end{bmatrix}$$

このとき, $c_1=1$ と $c_1=0$ となり矛盾. よって $(*)$ を満たす c_1, c_2 は存在しない. よって $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の 1 次結合で書けない $\mathbb{R}^3$ のベクトルがある. 以上より, $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底ではない.

□

例題 20-3

次の $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\}$ は $\mathbb{R}^2$ の基底か?

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

[解答]

$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+c_3\boldsymbol{a}_3=\mathbb{O}$ $(c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R})$ とすると,

$$\begin{cases} c_1+2c_2+c_3=0 \\ c_1+\ \ c_2-c_3=0\end{cases}\quad\cdots(*)$$

係数行列を基本変形で簡約化すると

$$\begin{bmatrix}1&2&1\\1&1&-1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-1&-2\end{bmatrix}$$
$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}$$
$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&1&2\end{bmatrix}$$

より, 行列の階数 $(=2)$ は変数の個数 $(=3)$ と異なるので, $(*)$ の解は $c_1=c_2=c_3=0$ 以外にも存在する (定理 7-2). よって $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は 1 次従属より $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\}$ は $\mathbb{R}^2$ の基底でない.

□

基底の取り方は 1 通りではありません. 例えば, 標準基底以外にも $\mathbb{R}^2$ の基底として,

$$\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{u}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\qquad\cdots②$$

が取れます (問題 20-1). このように基底の取り方はいくらでもあります. しかし,

基底に含まれるベクトルの個数は取り方に依らず一定である

例えば, ①, ②のどちらの $\mathbb{R}^2$ の基底も 2 個のベクトルからなっている.

定理 20-1 (文献 [1] 定理 4.4.1)
ベクトル空間 V の基底に含まれるベクトルの個数は, 基底の取り方に依らずに一定である.

上の定理を踏まえて, ベクトル空間の次元を定義します.

定義 20-2 (次元)
ベクトル空間 V の基底に含まれるベクトルの個数を V の**次元**といい, 記号で $\dim(V)$ と表します. ただし, $V = \{\mathbb{O}\}$ のときは $\dim(V) = 0$ と定める.

数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ は基底として標準基底が取れるので次元は n となります. つまり, $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ が成り立ちます.

問題 20-1 ② が $\mathbb{R}^2$ の基底であることを示せ.

問題 20-2 次のベクトルの組が $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ベクトル空間の次元が判明している場合, 次の定理が基底の判定において役に立ちます.

定理 20-2
n 次元のベクトル空間 V において, 1 次独立な n 個のベクトルの組は V の基底になる.

[証明]
文献 [1] の定理 4.4.2 とその証明から従う.

$\square$

定理 20-2 の使い方を確認しておきます.

例題 20-4

次のベクトルの組が $\mathbb{R}^3$ の基底になることを示せ.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

[解答]

$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ に注意する. 定理 20-2 より, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示すには, 1 次独立であることを示せばよい. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を並べた行列 A の行列式を考える.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -7 \\ -1 & -8 \end{vmatrix} = 33 \neq 0$$

定理 19-3 より $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立である.

□

問題 20-3 次のベクトルの組が $\mathbb{R}^3$ の基底になる実数 a, b の条件を求めよ.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{bmatrix}$$

定義 20-3

ベクトル空間 V の要素 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_t$ の 1 次結合すべてのなす集合

$$W = \left\{ c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_t\boldsymbol{u}_t \mid c_1, c_2, ..., c_t \in \mathbb{R} \right\}$$

は V の部分空間になる. このベクトル空間 W を

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_t \rangle_{\mathbb{R}}$$

と表すこととし, これを **$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_t$ で生成される V の部分空間**と呼ぶ.

定義 20-3 の $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_t$ の 1 次独立な最大個数を r とします. 必要なら順番を取り替えて $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ $(r \leq t)$ が 1 次独立とします. このとき, それ以外の $t - r$ 個のベクトルは

$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_r$ の 1 次結合で書けるので

$$W = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_r \rangle_{\mathbb{R}}.$$

よって, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ は W の基底になります. 従って $\dim(W) = r$ を得ます.

例題 20-5
数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

で生成される部分空間 $W = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle_{\mathbb{R}}$ の 1 組の基底を求め, 次元を求めよ.

[解答]

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \mathbb{O} \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}) \qquad \cdots ③$$

とすると

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 0 \\ c_1 - 3c_2 - c_3 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

係数行列を基本変形すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるので

$$\begin{cases} c_1 + 2c_3 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

つまり

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \cdots ④$$

① と ② で c_1, c_2, c_3 は共通なので, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ の間の 1 次独立 ·1 次従属の関係は,

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

の関係と同じになる. $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ は 1 次独立で, $\boldsymbol{b}_3 = 2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$. 従って, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ も 1 次独立で, $\boldsymbol{a}_3 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$. よって $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が W の基底であり, $\dim(W) = 2$ となる.

□

問題 20-4 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

で生成される部分空間 $W = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 \rangle_{\mathbb{R}}$ の 1 組の基底を求め, 次元を求めよ.