線形代数 (第 19 回) の解答

問題 19-1 の解答

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 + c_5\boldsymbol{a}_5 = \mathbb{O} \qquad (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}) \qquad \cdots ①$$

とする．左辺を計算して

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} c_1 & - & 3c_2 & + & c_3 & + & 3c_4 & & & = 0 \\ & & & - & c_3 & - & c_4 & + & c_5 & = 0 \\ 2c_1 & - & 6c_2 & - & 3c_3 & + & c_4 & - & 4c_5 & = 0 \end{array}\right.$$

を得る．この係数行列を基本変形すると

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -6 & -3 & 1 & -4 \end{bmatrix} &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & -4 \end{bmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & -4 \end{bmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

となるので

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} c_1 & - & 3c_2 & & & + & 2c_4 & & = 0 \\ & & & & c_3 & + & c_4 & & = 0 \\ & & & & & & & c_5 & = 0 \end{array}\right.$$

つまり

$$c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_5\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \cdots ②$$

① と② で c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 は共通なので, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_5$ の間の 1 次独立 ·1 次従属の関係は,

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

の関係とまったく同じになる. $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_3$, $\boldsymbol{b}_5$ は 1 次独立で, $\boldsymbol{b}_2 = -3\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_4 = 2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_3$. よって $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_5$ も 1 次独立で, $\boldsymbol{a}_2 = -3\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_4 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3$. 定理 19-1 より, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_5$ の 1 次独立の最大個数は $r = 3$ となる.

□

[コメント] 定理 19-2 を用いると, 次のように求めることもできる. 問題 19-1 の係数行列を

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -6 & -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

と置く. 上の基本変形より $\mathrm{rank}(A) = 3$ と分かる. 定理 19-2 から $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_5$ の 1 次独立の最大個数は $r = \mathrm{rank}(A) = 3$ となる.

問題 19-2 の解答

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) + c_4 f_4(x) = \mathbf{0} \qquad (c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}) \qquad \cdots ③$$

とすると

$$(\text{左辺}) = (c_1 + c_2 + c_3 + c_4) + (-c_1 + c_2 + c_3)x + (c_3 + c_4)x^2$$

であるので

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} c_1 & + & c_2 & + & c_3 & + & c_4 & = 0 \\ -c_1 & + & c_2 & + & c_3 & & & = 0 \\ & & & & c_3 & + & c_4 & = 0 \end{array} \right. \qquad \cdots ④$$

係数行列を基本変形すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

よって

$$\begin{cases} c_1 & & & + & \frac{1}{2}c_4 & = 0 \\ & c_2 & & - & \frac{1}{2}c_4 & = 0 \\ & & c_3 & + & c_4 & = 0 \end{cases}$$

つまり

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \cdots ⑤$$

③ と ⑤ で c_1, c_2, c_3, c_4 は共通なので, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ の間の 1 次独立 ·1 次従属の関係は,

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

の関係と同じになる. $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ は 1 次独立で, $\boldsymbol{b}_4 = \frac{1}{2}\boldsymbol{b}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3$. よって $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ は 1 次独立で, $f_4(x) = \frac{1}{2}f_1(x) - \frac{1}{2}f_2(x) + f_3(x)$. 定理 19-1 より $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ の 1 次独立の最大個数は $r = 3$ である. □

[コメント] 定理 19-2 を用いた計算方法も載せておく. ③ と ④より, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ の間の 1 次独立 ·1 次従属の関係は,

$$\boldsymbol{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

の間の関係と同じである. よって

$$f_1(x),\ f_2(x), f_3(x), f_4(x) \text{ の 1 次独立の最大個数} = \boldsymbol{d}_1,\ \boldsymbol{d}_2,\ \boldsymbol{d}_3,\ \boldsymbol{d}_4 \text{の 1 次独立の最大個数}$$

となる. $\boldsymbol{d}_1,\ \boldsymbol{d}_2,\ \boldsymbol{d}_3,\ \boldsymbol{d}_4$ を並べた行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

を考えると, 定理 19-2 より

$$\boldsymbol{d}_1,\ \boldsymbol{d}_2,\ \boldsymbol{d}_3,\ \boldsymbol{d}_4 \text{の 1 次独立の最大個数} = \mathrm{rank}(A)$$

問題 19-2 の基本変形より $\mathrm{rank}(A) = 3$. よって $f_1(x),\ f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ の 1 次独立の最大個数は $r = 3$ となる.

問題 19-3 の解答

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を並べた行列 A の行列式を考える.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ a & 3 & -3 \end{vmatrix} = a + 9$$

定理 19-3 より $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が 1 次従属であるには, $|A| = 0$ であればよい. よって $a = -9$.