線形代数 (第 20 回) の解答

問題 20-1 の解答

基底の条件 (i), (ii) を確認する.

(i) $\mathbb{R}^2$ の任意のベクトル $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ は

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-a+b) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a\boldsymbol{u}_1 + (-a+b)\boldsymbol{u}_2$$

と $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ の 1 次結合で書ける.

(ii) $c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 = \mathbb{O}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ とすると

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

であり, これを満たすのは $c_1 = c_2 = 0$ のみ. よって $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ は 1 次独立である.

以上 (i), (ii) より $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ は $\mathbb{R}^2$ の基底である.

問題 20-2 の解答

基底の条件 (i), (ii) を確認する.

(i) $\mathbb{R}^3$ の任意のベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ について, 方程式

$$s\boldsymbol{a}_1 + t\boldsymbol{a}_2 + u\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b}$$

を考える. このとき,

$$\begin{cases} s + t + u = a \\ \quad\ \ t + u = b \quad \cdots (*) \\ \qquad\quad u = c \end{cases}$$

これを解くと, $s = a - b,\ t = b - c,\ u = c.$ よって

$$(a-b)\boldsymbol{a}_1 + (b-c)\boldsymbol{a}_2 + c\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b}$$

より, $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で書ける.

(ii) $s\boldsymbol{a}_1 + t\boldsymbol{a}_2 + u\boldsymbol{a}_3 = \mathbb{O}$ $(s, t, u \in \mathbb{R})$ とする．このとき，$s = t = u = 0$ となる ((i) の $\boldsymbol{b} = \mathbb{O}$ の場合)．よって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立である．

以上 (i), (ii) より $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底である．

問題 20-3 の解答

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が基底であるためには，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が 1 次独立であればよい．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を並べた行列 A の行列式を考える．

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & a^2-1 \\ 0 & b-1 & b^2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & a^2-1 \\ b-1 & b^2-1 \end{vmatrix} = (a-1)(b-1)(b-a)$$

定理 19-3 より $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立になるためには $|A| \neq 0$ が必要十分である．よって，求める条件は「$a \neq 1$ かつ $b \neq 1$ かつ $a \neq b$」である．

問題 20-4 の解答

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 = \mathbb{O} \qquad (c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}) \qquad \cdots ①$$

とすると

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 2c_3 + 3c_4 = 0 \\ c_1 + 2c_3 + 2c_4 = 0 \\ c_2 + c_4 = 0 \end{cases}$$

係数行列を基本変形すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるので

$$\begin{cases} c_1 + 2c_3 + 2c_4 = 0 \\ c_2 + c_4 = 0 \end{cases}$$

つまり

$$c_1 \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad \cdots ②$$

① と ② で c_1, c_2, c_3, c_4 は共通なので, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ の間の 1 次独立 ·1 次従属の関係は

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_4 = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

の関係と同じになる. $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ は 1 次独立で, $\boldsymbol{b}_3 = 2\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_4 = 2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$. 従って, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ も 1 次独立で, $\boldsymbol{a}_3 = 2\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_4 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$. よって $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は W の基底であり, $\dim(W) = 2$ となる.