線形代数 (第21回)

21 ベクトル空間の基底と次元の計算方法

前回はベクトル空間に対して基底や次元を定義し, 数ベクトル空間で例を確認しました. 定義を復習しておきます. ベクトル空間 V のベクトルの組 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ が V の**基底**とは, 次の 2 条件を満たすことでした.

(i) V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ の 1 次結合でかける.

(ii) $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は 1 次独立である. つまり,

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

また基底に含まれるベクトルの個数を V の**次元**といい, $\dim(V)$ と表しました. 今回は「連立 1 次方程式の解空間」や「多項式ベクトル空間」の場合に基底や次元の計算方法ついてみます.

連立 1 次方程式の解空間の場合

まずは, 連立 1 次方程式の解空間の場合を考えます.

例題 21-1

次のベクトル空間 W の 1 組の基底を求め, 次元 $\dim(W)$ を答えよ.

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y - z = 0 \right\}$$

[解答]

(i)

$$\begin{aligned} W &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y - z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = -2y + z \right\} \end{aligned}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} -2y+z \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

よって, W の任意のベクトルは $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ の 1 次結合でかける.

(ii) $c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 = \mathbb{O}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ とすると

$$\begin{bmatrix} -2c_1 + c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

より, $c_1 = c_2 = 0$. よって, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ は 1 次独立.

以上 (i), (ii) により, $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ は W の基底で, $\dim(W) = 2$ となる.

$\square$

例題 21-2

次のベクトル空間 W の 1 組の基底を求め, 次元 $\dim(W)$ を求めよ.

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} x+y-z & = & 0 \\ 3x+2y-z & = & 0 \end{array} \right\}$$

解答

(i) 連立方程式の係数行列を簡約化すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

であるので

$$
\begin{aligned}
W &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} x+z &=& 0 \\ y-2z &=& 0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} -z \\ 2z \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ z \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}
$$

よって, W の任意の元は $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ の 1 次結合でかける.

(ii) $\boldsymbol{u}$ だけからなるベクトルの組はもちろん 1 次独立である.

以上 (i), (ii) より, $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ は W の基底で, $\dim(W) = 1$ となる.

□

例題 21-2 の解答から分かる通り, 連立方程式の係数行列 A の簡約化において, 主成分に対応しない変数 (例題 21-2 の場合は z) の個数が W の次元となります. 主成分の個数が A の階数 (ランク) でしたので, 主成分に対応しない変数の個数は $n - \mathrm{rank}(A)$ となります.

定理 21-1 (文献 [1] 定理 4.4.3)
連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbb{O}$ の解空間

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \mathbb{O} \right\}$$

の次元は

$$\dim(W) = n - \mathrm{rank}(A)$$

問題 21-1 $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 = x_2 = x_3 \right\}$$

の 1 組の基底を求め, 次元 $\dim(W)$ を求めよ.

問題 21-2 $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 + 5x_4 & = & 0 \end{array} \right\}$$

の 1 組の基底を求め, 次元 $\dim(W)$ を求めよ.

多項式ベクトル空間の場合

次に多項式ベクトル空間の場合をみます. まずは, n 次以下の多項式全体のなすベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_n$ の基底について確認します.

例題 21-3
$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ は $\mathbb{R}[x]_n$ の基底であることを示せ. 従って

$$\dim(\mathbb{R}[x]_n) = n + 1.$$

[解答]
基底の条件 (i), (ii) を示せばよい.

(i) $\mathbb{R}[x]_n$ の任意の多項式 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ は明らかに $1, x, x^2, \ldots, x^n$ の 1 次結合でかけている.

(ii) $c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n = \mathbf{0}$ $(c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R})$ とすると, $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$ である. よって $1, x, x^2, \ldots, x^n$ は 1 次独立である.

よって $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ は $\mathbb{R}[x]_n$ の基底である.

□

[注意] 例題 21-3 の証明の (ii) で $c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n = \mathbf{0}$ での "=" は**多項式として等しい**ことを意味する. これは, 両辺の多項式の各係数が等しいということだから, $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$ が従う.

問題 21-3 $f(x) = x + 1$, $g(x) = x - 1$ は $\mathbb{R}[x]_1$ の基底であることを示せ.

例題 21-4

$\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間

$$W = \left\{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \;\middle|\; f(1) = 0, \quad f'(1) = 0 \right\}$$

の 1 組の基底を求め, 次元 $\dim(W)$ を求めよ.

[解答]

(i) W は次のように表せる.

$$W = \left\{ ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}[x] \;\middle|\; \begin{array}{rcl} a+b+c+d & = & 0 \\ 3a+2b+c & = & 0 \end{array} \right\}$$

連立方程式の係数行列を簡約化すると

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned} W &= \left\{ ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}[x] \;\middle|\; \begin{array}{rcl} a-c-2d & = & 0 \\ b+2c+3d & = & 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ (c+2d)x^3 + (-2c-3d)x^2 + cx + d \mid c, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ c(x^3 - 2x^2 + x) + d(2x^3 - 3x^2 + 1) \mid c, d \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

よって W の任意の元は $f_1(x) = x^3 - 2x^2 + x$, $f_2(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ の 1 次結合でかける.

(ii) $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = \mathbf{0}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ とすると

$$(c_1 + 2c_2)x^3 + (-2c_1 - 3c_2)x^2 + c_1 x + c_2 = \mathbf{0}$$

よって $c_1 = c_2 = 0$. 従って $f_1(x)$, $f_2(x)$ は 1 次独立.

以上 (i), (ii) より, $\{x^3 - 2x^2 + x,\ 2x^3 - 3x^2 + 1\}$ は W の基底で, $\dim(W) = 2$ となる.

□

問題 21-4 $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間

$$W = \left\{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \;\middle|\; f''(x) - 2xf'(x) = \mathbf{0} \right\}$$

の 1 組の基底を求め, 次元 $\dim(W)$ を求めよ.

参考文献

[1] 三宅敏恒, 線形代数学, 培風館.