線形代数 (第 21 回) の解答

問題 21-1 の解答

(i)

$$
\begin{aligned}
W &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 = x_2 = x_3 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_1 \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}
$$

よって, W の任意のベクトルは $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ の 1 次結合でかける.

(ii) $\boldsymbol{u}_1$ だけからなるベクトルの組はもちろん 1 次独立である.

以上 (i), (ii) により, $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ は W の基底で, $\dim(W) = 1$ となる.

□

問題 21-2 の解答

(i) 連立方程式の係数行列を簡約化すると

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & -5 & 5 \end{bmatrix} &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

であるので

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 + 3x_2 & = & 0 \\ x_3 - x_4 & = & 0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} -3x_2 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

よって, W の任意のベクトルは $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ の 1 次結合でかける.

(ii) $c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 = \mathbb{O}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ とすると

$$\begin{bmatrix} -3c_1 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となるので, $c_1 = c_2 = 0$ となる. よって, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ は 1 次独立.

以上 (i), (ii) より, $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ は W の基底で, $\dim(W) = 2$ となる.

$\square$

問題 21-3 の解答

(i) $ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ に対して,

$$ax + b = \frac{a+b}{2} f(x) + \frac{a-b}{2} g(x)$$

よって $\mathbb{R}[x]_1$ の任意の元は $f(x), g(x)$ の 1 次結合でかける.

(ii) $c_1 f(x) + c_2 g(x) = \mathbf{0}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ とすると

$$(c_1 + c_2)x + (c_1 - c_2) = \mathbf{0}$$

から $c_1 + c_2 = c_1 - c_2 = 0$. よって $c_1 = c_2 = 0$. 従って $f(x)$, $g(x)$ は 1 次独立.

以上 (i), (ii) より, $\{f(x),\ g(x)\}$ は $\mathbb{R}[x]_1$ の基底となる.

□

問題 21-4 の解答

(i) $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ と置く. このとき,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2, \quad f''(x) = 2a_2 + 6a_3 x$$

に注意して

$$\begin{aligned} W &= \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in \mathbb{R}[x] \;\middle|\; (2a_2 + 6a_3 x) - 2x(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2) = \mathbf{0} \right\} \\ &= \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in \mathbb{R}[x] \;\middle|\; 2a_2 + (-2a_1 + 6a_3)x - 4a_2 x^2 - 6a_3 x^3 = \mathbf{0} \right\} \\ &= \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in \mathbb{R}[x] \;\middle|\; a_2 = 0,\ a_1 - 3a_3 = 0,\ a_3 = 0 \right\} \\ &= \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in \mathbb{R}[x] \;\middle|\; a_1 = a_2 = a_3 = 0 \right\} \\ &= \left\{ a_0 \cdot 1 \;\middle|\; a_0 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

よって, W の任意の多項式は $g(x) = 1$ の 1 次結合でかける.

(ii) $g(x)$ だけからなる多項式の組はもちろん 1 次独立である.

以上 (i), (ii) より, $\{1\}$ は W の基底で, $\dim(W) = 1$ となる.

□