線形代数 (第 22 回)

22 線形写像の定義と性質

今回はベクトル空間において重要な線形写像の概念について紹介します.

定義 22-1
ベクトル空間 U, W の間の写像 $T : U \to W$ が**線形写像**であるとは, 次の 2 つの条件を満たすことを言います.

(i) すべての $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u'} \in U$ に対して, $T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u'}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{u'})$.
(ii) すべての $\boldsymbol{u} \in U$ とすべての $c \in \mathbb{R}$ に対して, $T(c\boldsymbol{u}) = c \cdot T(\boldsymbol{u})$.

定義 (i), (ii) から線形写像はベクトル空間の和とスカラー倍を保存するような写像と言えます. まずは関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の場合を考えます.

例題 22-1

(1) 関数 $f(x) = 2x$ は線形写像かどうか答えよ.
(2) 関数 $f(x) = 2x^2$ は線形写像かどうか答えよ.

[解答]
(1) 線形写像である.

(i) すべての x, $x' \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x + x') = 2(x + x') = 2x + 2x' = f(x) + f(x')$$

(ii) すべての $x \in \mathbb{R}$ とすべての $c \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(cx) = 2 \times cx = c \times 2x = cf(x)$$

以上 (i), (ii) より, $f(x)$ は線形写像である.

(2) $f(x)$ は線形写像ではない. 実際,

$$f(1+1) = f(2) = 2 \cdot 2^2 = 8, \quad f(1) + f(1) = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 = 4$$

より, $f(1+1) \neq f(1) + f(1)$. 従って, $f(x)$ は線形写像の定義 (i) を満たさない.

$\square$

例題 22-2

(1) 写像 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$ で定義するとき, T は線形写像かどうか答えよ.

(2) 写像 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ で定義するとき, T は線形写像かどうか答えよ.

[解答]

(1) 線形写像である.

(i) すべての $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}) = T(\begin{bmatrix} x+x' \\ y+y' \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x+x' \\ x+x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' \\ x' \end{bmatrix} = T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) + T(\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix})$$

(ii) すべての $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とすべての $c \in \mathbb{R}$ に対して

$$T(c\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = T(\begin{bmatrix} cx \\ cy \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} cx \\ cx \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = c \cdot T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix})$$

以上 (i), (ii) より, T は線形写像である.

(2) 線形写像ではない.

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = T(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) + T(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

より

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) \neq T(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) + T(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix})$$

よって T は線形写像の定義 (i) を満たさない.

$\square$

問題 22-1

(1) 写像 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を $T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = x+y$ で定義するとき, T は線形写像かどうか答えよ.

(2) 写像 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を $T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = x^2+y^2$ で定義するとき, T は線形写像かどうか答えよ.

問題 22-2 写像 $T:\mathbb{R}[x]_n\to\mathbb{R}[x]_{n-1}$ を $T(f(x)) = f'(x)$ と定義すると, T は線形写像になることを示せ. ただし, $\mathbb{R}[x]_n$ は n 次以下の実数係数多項式のなすベクトル空間である.

定理 22-1

$m\times n$ 型行列 A について, 写像 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ を

$$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

と定義すると, T は線形写像である.

[証明]

(i) すべての $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'}\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x'}) = A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x'}) = A\boldsymbol{x}+A\boldsymbol{x'} = T(\boldsymbol{x})+T(\boldsymbol{x'})$$

(ii) すべての $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ とすべての $c\in\mathbb{R}$ に対して

$$T(c\boldsymbol{x}) = A\cdot c\boldsymbol{x} = c\cdot A\boldsymbol{x} = c\cdot T(\boldsymbol{x})$$

以上 (i), (ii) より, T は線形写像である.

$\square$

例題 22-2 (1) の写像 T は行列を用いると,

$$T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

と表せます. 従って, 定理 22-1 から T は線形写像であることが分かります.

定理 22-2

U, W をベクトル空間とし, それぞれの零ベクトルを $\mathbb{O}_U$, $\mathbb{O}_W$ と書く. 線形写像 $T : U \to W$ について次が成り立つ.

$$T(\mathbb{O}_U) = \mathbb{O}_W$$

[証明]

$\mathbb{O}_U = \mathbb{O}_U + \mathbb{O}_U$ に注意する. T は線形写像より

$$T(\mathbb{O}_U) = T(\mathbb{O}_U + \mathbb{O}_U) = T(\mathbb{O}_U) + T(\mathbb{O}_U)$$

両辺に $-T(\mathbb{O}_U)$ を加えて, $\mathbb{O}_W = T(\mathbb{O}_U)$ を得る.

$\square$

定義 22-2

線形写像 $T : U \to W$ を考える.

(1) W の部分集合

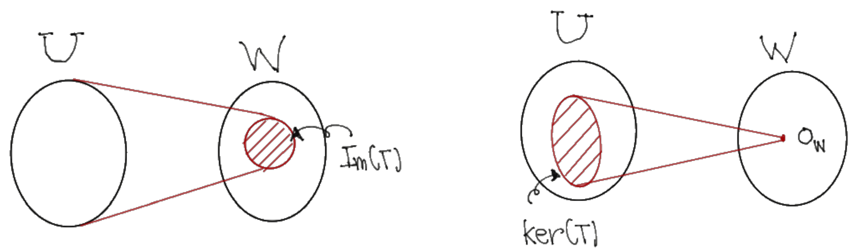
$$\mathrm{Im}(T) := \{T(x) \mid x \in U\}$$

を T の**像** (またはイメージ T) と呼ぶ.

(2) U の部分集合

$$\mathrm{Ker}(T) := \{x \in U \mid T(x) = \mathbb{O}_W\}$$

を T の**核** (またはカーネル T) と呼ぶ.



定理 22-3
線形写像 $T : U \to W$ を考える.

(1) $\mathrm{Im}(T)$ は W の部分空間である.

(2) $\mathrm{Ker}(T)$ は U の部分空間である.

[証明]
(1) のみ示す ((2) は問題 22-3). $\mathrm{Im}(T)$ が部分空間の条件 (定理 16-3) を満たすことを確認する.

(i) $\mathbb{O}_W = T(\mathbb{O}_U) \in \mathrm{Im}(T)$.

(ii) $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \mathrm{Im}(T)$ とする. このとき, $\boldsymbol{y}_1 = T(\boldsymbol{x}_1)$, $\boldsymbol{y}_2 = T(\boldsymbol{x}_2)$ となる $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in U$ が取れる. よって

$$\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 = T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2) = T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \in \mathrm{Im}(T).$$

(iii) $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}(T)$ と $c \in \mathbb{R}$ を取る. このとき, $\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x})$ となる $\boldsymbol{x} \in U$ がある.

$$c \cdot \boldsymbol{y} = c \cdot T(\boldsymbol{x}) = T(c \cdot \boldsymbol{x}) \in \mathrm{Im}(T).$$

以上 (i)-(iii) より, $\mathrm{Im}(T)$ は W の部分空間になる.

$\square$

問題 22-3 定理 22-3 (2) を証明せよ.

定理 22-3 から $\mathrm{Im}(T)$ と $\mathrm{Ker}(T)$ はベクトル空間となります. 従って, これらには基底や次元の概念が定義されます.

定義 22-3
線形写像 $T : U \to W$ を考える.

(1) 像 $\mathrm{Im}(T)$ の次元 $\dim(\mathrm{Im}(T))$ を T の**階数**と呼び, $\mathrm{rank}(T)$ で表す.

(2) 核 $\mathrm{Ker}(T)$ の次元 $\dim(\mathrm{Ker}(T))$ を T の**退化次数**と呼び, $\mathrm{null}(T)$ と表す.

例題で階数 $\mathrm{rank}(T)$ と退化次数 $\mathrm{null}(T)$ の計算方法を確認しておきます.

例題 22-3

線形写像 $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$ で定義する.

(1) 核 $\mathrm{Ker}(T)$ の 1 組の基底と退化次数 $\mathrm{null}(T)$ を求めよ.

(2) 像 $\mathrm{Im}(T)$ の 1 組の基底と階数 $\mathrm{rank}(T)$ を求めよ.

[解答]

(1)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(T) &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

従って, $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ は $\mathrm{Ker}(T)$ の基底で, $\mathrm{null}(T) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1$.

(2)

$$\mathrm{Im}(T) = \left\{ T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$$

従って, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ は $\mathrm{Im}(T)$ の基底で, $\mathrm{rank}(T) = \dim(\mathrm{Im}(T)) = 1$.

$\square$

例題 22-4

線形写像 $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を

$$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

で定義する.

(1) 核 $\mathrm{Ker}(T)$ の 1 組の基底と退化次数 $\mathrm{null}(T)$ を求めよ.

(2) 像 $\mathrm{Im}(T)$ の 1 組の基底と階数 $\mathrm{rank}(T)$ を求めよ.

[解答]

(1) $\mathrm{Ker}(T)$ の定義より

$$\mathrm{Ker}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

条件の係数行列を基本変形で簡約化すると

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であるので

$$\mathrm{Ker}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_4 & = & 0 \\ x_3 + x_4 & = & 0 \end{array} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} -2x_2 + x_4 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

よって, $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ は $\mathrm{Ker}(T)$ を生成する. 次に $c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 = \mathbb{O}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ とすると

$$\begin{bmatrix} -2c_1 + c_2 \\ c_1 \\ -c_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

より, 解は $c_1 = c_2 = 0$ のみ. よって, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ は 1 次独立である. 以上より, $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ は $\mathrm{Ker}(T)$ の基底で, $\mathrm{null}(T) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) = 2$.

(2) $\mathrm{Im}(T)$ の定義より,

$$\mathrm{Im}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

よって, $\mathrm{Im}(T)$ は $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ で生成される. 次に

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 = \mathbb{O} \quad (c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}) \qquad \cdots ①$$

とすると

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2c_1 & + & 4c_2 & + & 3c_3 & + & c_4 & = 0 \\ & & & & c_3 & + & c_4 & = 0 \\ c_1 & + & 2c_2 & + & c_3 & & & = 0 \end{array}\right.$$

係数行列を基本変形で簡約化すると,

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるので

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} c_1 & + & 2c_2 & & & - & c_4 & = 0 \\ & & & & c_3 & + & c_4 & = 0 \end{array}\right.$$

つまり,

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \cdots ②$$

①と②で c_1, c_2, c_3, c_4 は共通なので, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の間の 1 次独立 ·1 次従属の関係は,

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

の間の関係と同じ. $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3$ は 1 次独立で, $\boldsymbol{b}_2 = 2\boldsymbol{b}_1,\ \ \boldsymbol{b}_4 = -\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_3$. 定理 19-1 から

$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ の 1 次独立な最大個数は $r = 2$
$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3$ は 1 次独立
$\boldsymbol{b}_2 = 2\boldsymbol{b}_1,\ \ \boldsymbol{b}_4 = -\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_3$

よって

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の 1 次独立な最大個数は $r = 2$
$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立
$\boldsymbol{a}_2 = 2\boldsymbol{a}_1,\ \ \boldsymbol{a}_4 = -\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3$

以上より, $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3\}$ は $\mathrm{Im}(T)$ の基底で, $\mathrm{rank}(T) = \dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.

□

定理 22-4 (次元公式)
ベクトル空間 U, W の間の線形写像 $T : U \to W$ について次が成り立つ.

$$\mathrm{null}(T) + \mathrm{rank}(T) = \dim(U)$$

[証明]
文献 [1] 定理 5.1.2 を参照のこと.

□

例題 22-3 では

$$\mathrm{null}(T) = 1, \ \ \mathrm{rank}(T) = 1, \ \ \dim(\mathbb{R}^2) = 2$$

で, 例題 22-4 では

$$\mathrm{null}(T) = 2, \ \ \mathrm{rank}(T) = 2, \ \ \dim(\mathbb{R}^4) = 4$$

なので, どちらの場合でも定理 22-4 が成立していることが分かります.

問題 22-4 写像 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $T(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ と定義する.

(1) T は線形写像であることを示せ.
(2) 像 $\mathrm{Im}(T)$ の 1 組の基底と階数 $\mathrm{rank}(T)$ を求めよ.
(3) 核 $\mathrm{Ker}(T)$ の 1 組の基底と退化次数 $\mathrm{null}(T)$ を求めよ.

問題 22-5 写像 $T : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ を $T(f(x)) = f'(x) + f(x)$ と定義する.

(1) T は線形写像であることを示せ.
(2) 像 $\mathrm{Im}(T)$ の 1 組の基底と階数 $\mathrm{rank}(T)$ を求めよ.
(3) 核 $\mathrm{Ker}(T)$ の 1 組の基底と退化次数 $\mathrm{null}(T)$ を求めよ.

参考文献

[1] 三宅敏恒, 線形代数学, 培風館.