線形代数 (第22回) の解答

問題 22-1 の解答

(1) 線型写像である.

(i) すべての $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}) = T(\begin{bmatrix} x+x' \\ y+y' \end{bmatrix}) = (x+x') + (y+y') = (x+y) + (x'+y') = T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) + T(\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix})$$

(ii) すべての $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とすべての $c \in \mathbb{R}$ に対して

$$T(c\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = T(\begin{bmatrix} cx \\ cy \end{bmatrix}) = cx + cy = c(x+y) = c \cdot T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix})$$

以上 (i), (ii) より, T は線形写像である.

(2) 線型写像ではない.

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = T(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}) = 8, \qquad T(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) + T(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = 2 + 2 = 4$$

より

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) \neq T(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) + T(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix})$$

よって T は線形写像の定義 (i) を満たさない.

問題 22-2 の解答

(i) すべての $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]_n$ に対して

$$T(f(x) + g(x)) = \big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x) = T(f(x)) + T(g(x))$$

(ii) すべての $f(x) \in \mathbb{R}[x]_n$ とすべての $c \in \mathbb{R}$ に対して

$$T(c \cdot f(x)) = \big(c \cdot f(x)\big)' = c \cdot f'(x) = c \cdot T(f(x))$$

以上 (i), (ii) より, T は線形写像である.

問題 22-3 の解答

$\mathrm{Ker}(T)$ が部分空間の条件を満たすことをチェックする.

(i) 定理 22-2 より $T(\mathbb{O}_U) = \mathbb{O}_W$ より $\mathbb{O}_U \in \mathrm{Ker}(T)$.

(ii) $\mathrm{Ker}(T)$ の任意の要素 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u'}$ について

$$T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u'}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{u'}) = \mathbb{O}_W + \mathbb{O}_W = \mathbb{O}_W$$

よって $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u'} \in \mathrm{Ker}(T)$.

(iii) $\mathrm{Ker}(T)$ の任意の要素 $\boldsymbol{u}$ と任意の実数 c に対して

$$T(c\boldsymbol{u}) = c \cdot T(\boldsymbol{u}) = c \cdot \mathbb{O}_W = \mathbb{O}_W$$

よって $c\boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker}(T)$.

以上より, $\mathrm{Ker}(T)$ は U の部分空間になる.

問題 22-4 の解答

(1)

(i) すべての $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$T(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}) = T(\begin{bmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x+x' \\ y+y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = T(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) + T(\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix})$$

(ii) すべての $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ とすべての $c \in \mathbb{R}$ に対して

$$T(c\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = T(\begin{bmatrix} cx \\ cy \\ cz \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} cx \\ cy \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = cT(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix})$$

以上より, T は線形写像である.

(2)

$$\mathrm{Im}(T) = \left\{ T(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

よって $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ は $\mathrm{Im}(T)$ を生成する. また $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ は 1 次独立である. よって, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ は $\mathrm{Im}(T)$ の基底で, $\mathrm{rank}(T) = \dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.

(3)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(T) &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; T(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

従って $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ は $\mathrm{Ker}(T)$ の基底で, $\mathrm{null}(T) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1$.

問題 22-5 の解答

(1)

(i) すべての $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]_2$ に対して

$$\begin{aligned}
T(f(x) + g(x)) &= (f(x) + g(x))' + (f(x) + g(x)) \\
&= f'(x) + f(x) + g'(x) + g(x) \\
&= T(f(x)) + T(g(x)).
\end{aligned}$$

(ii) すべての $f(x) \in \mathbb{R}[x]_2$ とすべての $c \in \mathbb{R}$ に対して

$$T(cf(x)) = (cf(x))' + cf(x) = cf'(x) + cf(x) = c(f'(x) + f(x)) = cT(f(x)).$$

以上 (i), (ii) により, T は線形写像.

(2)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(T) &= \{T(ax^2 + bx + c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \\
&= \{2ax + b + ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a(x^2 + 2x) + b(x + 1) + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

より, $f_1(x) = x^2 + 2x,\ f_2(x) = x + 1,\ f_3(x) = 1$ は $\mathrm{Im}(T)$ を生成する. また

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) = \mathbf{0} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

とすると,

$$c_1 x^2 + (2c_1 + c_2)x + (c_2 + c_3) = \mathbf{0}$$

より, 解は $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ のみ. よって $f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)$ は 1 次独立. 以上より, $\{x^2+2x, x+1, 1\}$ は $\mathrm{Im}(T)$ の基底で, $\mathrm{rank}(T) = \dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$.

(3)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(T) &= \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_2 \mid T(f(x)) = \mathbf{0}\} \\
&= \{ax^2+bx+c \in \mathbb{R}[x]_2 \mid T(ax^2+bx+c) = \mathbf{0}\} \\
&= \{ax^2+bx+c \in \mathbb{R}[x]_2 \mid ax^2+(2a+b)x+(b+c) = \mathbf{0}\} \\
&= \{ax^2+bx+c \in \mathbb{R}[x]_2 \mid a = 0,\ 2a+b = 0,\ b+c = 0\} \\
&= \{ax^2+bx+c \in \mathbb{R}[x]_2 \mid a = b = c = 0\} \\
&= \{0\}.
\end{aligned}
$$

よって $\mathrm{null}(T) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) = 0$ (基底は存在しない).