線形代数 (第23回)

23 線形写像の表現行列

前回は線形写像の定義や性質をみました. 今回は, 線形写像を調べる方法として, 表現行列というものを紹介します. これは, ベクトル空間の基底を固定することによって座標を導入し, それを利用して線形写像を行列で表現したものです.

23-1 表現行列の定義と例

ベクトル空間 U, W と線形写像 $T: U \to W$ を考えます. また U の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n\}$ と W の基底 $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{w}_m\}$ を取ります. このとき, $T(\boldsymbol{u}_1)$ は W の要素なので,

$$T(\boldsymbol{u}_1) = a_{11}\boldsymbol{w}_1 + a_{21}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{w}_m \quad (a_{11}, ..., a_{m1} \in \mathbb{R})$$

と書けます. 同様に

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{u}_2) &= a_{12}\boldsymbol{w}_1 + a_{22}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{m2}\boldsymbol{w}_m \quad (a_{12}, ..., a_{m2} \in \mathbb{R}) \\ &\vdots \\ T(\boldsymbol{u}_n) &= a_{1n}\boldsymbol{w}_1 + a_{2n}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{w}_m \quad (a_{1n}, ..., a_{mn} \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

と書けます. これをまとめて行列の式で整理すると

$$\Big(T(\boldsymbol{u}_1), T(\boldsymbol{u}_2), ..., T(\boldsymbol{u}_n)\Big) = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{w}_m) \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

となります.

定義 23-1 (表現行列)
上の行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

を U の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n\}$ と W の基底 $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{w}_m\}$ に関する T の**表現行列**と言う.

例題で表現行列を計算してみましょう. **基底を変えれば表現行列も変わる**, ことを認識して下さい.

例題 23-1

線形写像 $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を次で定める.

$$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$$

このとき, 次の基底に関する T の表現行列を求めよ.

(1) $\mathbb{R}^3$ の基底 : $\left\{ \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$,

$\mathbb{R}^2$ の基底 : $\left\{ \boldsymbol{e}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(2) $\mathbb{R}^3$ の基底 : $\left\{ \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$,

$\mathbb{R}^2$ の基底 : $\left\{ \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

[解答]

(1)

$$T(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}'_1 + \boldsymbol{e}'_2$$

$$T(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = 4\boldsymbol{e}'_1 - \boldsymbol{e}'_2$$

$$T(\boldsymbol{e}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}'_1 + 2\boldsymbol{e}'_2$$

よって

$$\begin{aligned}\Big(T(\boldsymbol{e}_1), T(\boldsymbol{e}_2), T(\boldsymbol{e}_3)\Big) &= (\boldsymbol{e}'_1 + \boldsymbol{e}'_2, 4\boldsymbol{e}'_1 - \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_1 + 2\boldsymbol{e}'_2) \\ &= (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2) \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

よって, 基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ と基底 $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$ に関する T の表現行列は $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(2)

$$T(\boldsymbol{a}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = 5\boldsymbol{b}_2$$

$$T(\boldsymbol{a}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2$$

$$T(\boldsymbol{a}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}_1 + 4\boldsymbol{b}_2$$

よって

$$\begin{aligned}\Big(T(\boldsymbol{a}_1), T(\boldsymbol{a}_2), T(\boldsymbol{a}_3)\Big) &= (5\boldsymbol{b}_2, 3\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1 + 4\boldsymbol{b}_2) \\ &= (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

よって, 基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ と基底 $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ に関する表現行列は $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

$\square$

[補足]

(1) 例題 23-1 (1) の表現行列は T を定義した行列と同じになっています. この事実は, 標準基底の場合ではいつでも成立します. つまり, A を $m \times n$ 行列とするとき, 線型写像

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \ (\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x})$$

に対して, $\mathbb{R}^n$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ と $\mathbb{R}^m$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, ..., \boldsymbol{e}'_m\}$ に関する表現行列は A 自身になります.

(2) 例題 23-1 (2) は次節で別解を与えます.

問題 23-1 線形写像 $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を次で定める.

$$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$$

このとき, 次の基底に関する T の表現行列を求めよ.

$$\mathbb{R}^3 \text{ の基底 : } \left\{ \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathbb{R}^2 \text{ の基底 : } \left\{ \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

23-2 表現行列と基底変換

引き続き, ベクトル空間 U, W の間の線形写像 $T: U \to W$ を考えます. このとき, U の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n\}$ と W の基底 $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{w}_m\}$ に関する T の表現行列は

$$\Big(T(\boldsymbol{u}_1), T(\boldsymbol{u}_2), ..., T(\boldsymbol{u}_n)\Big) = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{w}_m)A \qquad \cdots ①$$

を満たす行列 A のことでした. 次に, U の別の基底 $\{\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, ..., \boldsymbol{u}'_n\}$ と W の別の基底 $\{\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, ..., \boldsymbol{w}'_m\}$ を取り, 同様に表現行列を考えます.

$$\Big(T(\boldsymbol{u}'_1), T(\boldsymbol{u}'_2), ..., T(\boldsymbol{u}'_n)\Big) = (\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, ..., \boldsymbol{w}'_m)B \qquad \cdots ②$$

このとき, **A と B はどのような関係にあるでしょうか？**

$$\boldsymbol{u}'_i = p_{1i}\boldsymbol{u}_1 + p_{2i}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + p_{ni}\boldsymbol{u}_n \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

と書けるので

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, ..., \boldsymbol{u}'_n) &= (p_{11}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + p_{n1}\boldsymbol{u}_n, \cdots, p_{1n}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + p_{nn}\boldsymbol{u}_n) \\ &= (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n) \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \qquad \cdots ③ \end{aligned}$$

と表せます. 行列

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

を $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n\}$ と $\{\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, ..., \boldsymbol{u}'_n\}$ に関する**基底変換行列**と呼びます. 同様に

$$(\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, ..., \boldsymbol{w}'_m) = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{w}_m)Q \qquad \cdots ④$$

を考えます．T は線形写像であるので③の両辺の各成分に T を施すと

$$
\begin{aligned}
(T(\boldsymbol{u}'_1), T(\boldsymbol{u}'_2), ..., T(\boldsymbol{u}'_n)) &\overset{③}{=} (T(\boldsymbol{u}_1), T(\boldsymbol{u}_2), ..., T(\boldsymbol{u}_n))P \\
&\overset{①}{=} (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{w}_m)AP \qquad \cdots ⑤
\end{aligned}
$$

一方,

$$
\begin{aligned}
(T(\boldsymbol{u}'_1), T(\boldsymbol{u}'_2), ..., T(\boldsymbol{u}'_n)) &\overset{②}{=} (\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, ..., \boldsymbol{w}'_m)B \\
&\overset{④}{=} (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{w}_m)QB \qquad \cdots ⑥
\end{aligned}
$$

⑤−⑥ より

$$(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{w}_m)(AP - QB) = (\mathbb{O}_W, \mathbb{O}_W, ..., \mathbb{O}_W)$$

$\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, ..., $\boldsymbol{w}_m$ は 1 次独立なので $AP = QB$. つまり, $B = Q^{-1}AP$ となります．以上より, 次が得られたことになります.

定理 23-1

線型写像 $T : U \to W$ を考える．U の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n\}$ と W の基底 $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{w}_m\}$ に関する T の表現行列を A とし, U の基底 $\{\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, ..., \boldsymbol{u}'_n\}$ と W の基底 $\{\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, ..., \boldsymbol{w}'_m\}$ に関する T の表現行列を B とする．また,

$$(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, ..., \boldsymbol{u}'_n) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n)P, \quad (\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, ..., \boldsymbol{w}'_m) = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{w}_m)Q$$

を満たす行列 P, Q を取る．このとき, $B = Q^{-1}AP$ が成立する.

[例題 23-1 (2) の別解]

$\mathbb{R}^3$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ と $\mathbb{R}^2$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$ に関する T の表現行列は

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(p.3 の [補足] を参照)．また

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ここで,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

と置くと, $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ となる．定理 23-1 から基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ と基底 $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ に関する T の表現行列は

$$Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

□

定義 23-2 (線形変換)

ベクトル空間 U から U 自身への線形写像を U の**線形変換**と呼ぶ．線形変換 $T : U \to U$ と U の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n\}$ に対して,

$$(T(\boldsymbol{u}_1), T(\boldsymbol{u}_2), ..., T(\boldsymbol{u}_n)) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n)A$$

を満たす行列 A を $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n\}$ に関する T の表現行列と言う．

定理 23-1 を線形変換の場合に書き直すと次のようになります．

定理 23-2

線形変換 $T : U \to U$ を考える．U の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n\}$ に関する T の表現行列を A とし, また別の基底 $\{\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, ..., \boldsymbol{u}'_n\}$ に関する T の表現行列を B とする．また

$$(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, ..., \boldsymbol{u}'_n) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n)P$$

を満たす行列 P を取る．このとき, $B = P^{-1}AP$ が成立する．

例題で定理 23-2 の使い方を確認しておきます．

例題 23-2

線形変換 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$ で定義する．このとき, 基底 $\left\{ \boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ に関する T の表現行列 B を計算せよ．

[解答]

$\mathbb{R}^2$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ に関する T の表現行列は $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ である．また

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ と置くと，$P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ となる．定理 23-2 から

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

□

例題 23-3

多項式ベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_2$ の線形変換 T を

$$T(f) = f'(x) + f(1)x^2$$

で定義する．

(1) 基底 $\left\{1, x, x^2\right\}$ に関する T の表現行列 A を求めよ．
(2) 基底 $\left\{1, 1+x, 1+x+x^2\right\}$ に関する T の表現行列 B を求めよ．

[解答]

(1) $T(1) = x^2,\ T(x) = 1 + x^2,\ T(x^2) = 2x + x^2$ より

$$(T(1), T(x), T(x^2)) = (1, x, x^2) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

よって $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) また

$$(1, 1+x, 1+x+x^2) = (1, x, x^2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ここで, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ と置くと, $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる (逆行列の計算方法は資料「第 8 回 正則行列」を参照). 従って, 定理 23-2 より

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

□

問題 23-2 線形変換 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$ で定義する. このとき, 基底 $\left\{ \boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ に関する T の表現行列 B を求めよ.

問題 23-3 多項式ベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_2$ の線形変換 T を

$$T(f) = 2f'(x) + 3f(x)$$

で定義する.

(1) 基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する T の表現行列 A を求めよ.
(2) 基底 $\{1 + x, x + x^2, 1 - 2x^2\}$ に関する T の表現行列 B を求めよ.