線形代数 (第23回) の解答

問題 23-1 の解答

$$T(\boldsymbol{a}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}_1$$

$$T(\boldsymbol{a}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = -5\boldsymbol{b}_1 + 7\boldsymbol{b}_2$$

$$T(\boldsymbol{a}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = -3\boldsymbol{b}_1 + 5\boldsymbol{b}_2$$

よって

$$\Big(T(\boldsymbol{a}_1), T(\boldsymbol{a}_2), T(\boldsymbol{a}_3)\Big) = (\boldsymbol{b}_1, -5\boldsymbol{b}_1 + 7\boldsymbol{b}_2, -3\boldsymbol{b}_1 + 5\boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) \begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

よって, 求める表現行列は $\begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}$.

問題 23-2 の解答

$\mathbb{R}^2$ の標準基底 $\left\{ \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ に関する T の表現行列は

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

また

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ と置くと, $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ である. よって, 求める表現行列は

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 15 \\ -29 & -20 \end{bmatrix}$$

問題 23-3 の解答

(1) $T(1) = 3,\ T(x) = 2 + 3x,\ T(x^2) = 4x + 3x^2$ より

$$\big(T(1), T(x), T(x^2)\big) = (1, x, x^2)\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

よって $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(2) また

$$(1 + x, x + x^2, 1 - 2x^2) = (1, x, x^2)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ と置くと, $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. よって

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 8 \\ -4 & 7 & -16 \\ -2 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$